

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Институт естественных наук и математики

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по науке  
А.В. Германенко  
« 20 » г.



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

<b>Перечень сведений о рабочей программе дисциплины</b>	<b>Учетные данные</b>
<b>Программа аспирантуры</b> Вычислительная математика	<b>Код ПА</b> 1.1.6.
<b>Группа специальностей</b> Математика и механика	<b>Код</b> 1.1.
<b>Федеральные государственные требования (ФГТ)</b>	Приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 20 октября 2021 г. № 951
<b>Самостоятельно утвержденные требования (СУТ)</b>	Приказ «О введении в действие «Требований к разработке и реализации программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре УрФУ» №315/03 от 31.03.2022

Екатеринбург  
2022 г.

Рабочая программа дисциплины составлена авторами:

№ п/п	ФИО	Ученая степень, ученое звание	Должность	Структурное подразделение
1	Васин Владимир Васильевич	д.ф.-м.н., профессор, чл.- кор. РАН	профессор	Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук Института естественных наук и математики
2	Пименов Владимир Германович	д.ф.-м.н., профессор	зав. кафедрой	Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук Института естественных наук и математики

**Рекомендовано:**

**Учебно-методическим советом института естественных наук и математики**

Председатель учебно-методического совета ИЕНиМ  
Протокол № 5 от 17.05.2022 г.

  
Е.С. Буянова

**Согласовано:**

Начальник ОПНПК

  
Е.А. Бутрина

# **1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСЦИПЛИНЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

## **1.1. Аннотация содержания дисциплины**

Дисциплина «Вычислительная математика» способствует освоению основных профессиональных компетенций и направлена на формирование знаний о фундаментальных математических законах и теоретических методах описания современных разделов численных методов, в частности, теории решения некорректных задач.

Предусматривается изучение таких важных для приложений разделов математики, как понятие некорректности, способов регуляризации задач численного дифференцирования, решения плохо обусловленных систем линейных уравнений, экстремальных задач, интегральных уравнений первого рода, линейного и выпуклого программирования.

## **1.2. Язык реализации дисциплины - русский**

## **1.3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

Дисциплина «Вычислительная математика» относится к базовой части программы аспирантуры, направлена на подготовку к сдаче кандидатского минимума.

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

### **Знать:**

- современное состояние и тенденции развития теории некорректных задач;
- возможности использования теории некорректных задач для математического моделирования и дальнейшего использования методов теории некорректных задач в своей профессиональной деятельности;
- основные научные достижения в области теории некорректных задач, как фундаментальные, так и прикладной направленности.

### **Уметь:**

- оперировать современным аппаратом теории некорректных задач;
- проводить научные исследования, используя как классические, так и современные разделы теории некорректных задач.

### **Владеть (демонстрировать навыки и опыт деятельности):**

- основными теоретическими положениями теории некорректных задач, которые входят в программы кандидатского минимума;
- методами анализа теории некорректных задач, использующими современный аппарат фундаментальных дисциплин, особенно функционального анализа;
- методами качественного исследования теории некорректных задач, в том числе анализу сложных динамических объектов;
- методами приближенного исследования теории некорректных задач;
- компьютерными технологиями для реализации численных алгоритмов для исследования поведения систем сложной природы.

#### 1.4. Объем дисциплины

№ п/п	Виды учебной работы	Объем дисциплины		Распределение объема дисциплины по семестрам (час.)
		Всего часов	В т.ч. контактная работа (час.)*	6
1.	Аудиторные занятия	4	4	4
2.	Лекции	4	4	4
3.	Практические занятия	0	0	0
4.	Самостоятельная работа аспирантов, включая все виды текущей аттестации	104	1	104
5.	Промежуточная аттестация	Экзамен	1	Экзамен, 18
6.	Общий объем по учебному плану, час.	108	5	108
7.	Общий объем по учебному плану, з.е.	3		3

#### 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Код раздела, темы	Раздел, тема дисциплины*	Содержание
P1	<p><b>Примеры неустойчивых задач. Понятие некорректно поставленной задачи. Понятие плохо и хорошо обусловленных задач (на примере задачи решения СЛАУ)</b></p> <p><i>Лекции 1 час; самостоятельная работа аспиранта, 25 часов.</i></p>	<p>Плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), численное дифференцирование и задачи восстановления функций, экстремальные задачи для выпуклого функционала, линейные интегральные уравнения типа свертки, Вольтерра и Фредгольма I-го рода, неклассические задачи математической физики, задачи томографии, обратные задачи для дифференциальных уравнений.\</p> <p>Понятие некорректно поставленной задачи. Две основные постановки: решение уравнения и задача вычисления значений неограниченного оператора. Корректность по Адамару, Тихонову и Фикера. Множества корректности. Лемма Хаусдорфа и её обобщения в линейном случае.</p> <p>Понятие плохо и хорошо обусловленных задач (на примере задачи решения СЛАУ)</p> <p>Мера обусловленности СЛАУ. Анализ погрешности вычислений. Число обусловленности: свойства и способы вычисления (оценки). Обусловленность СЛАУ и устойчивость обратных матриц. Матрица Гильберта и другие примеры.</p>

		<p>Обобщенные решения (на примере задачи решения СЛАУ) Обобщение понятия решения. Псевдорешение. Анализ метода наименьших квадратов. Регулярный метод нахождения псевдорешения. Метод регуляризации Тихонова.</p> <p>Методы регуляризации (на основе итерационных алгоритмов и сингулярного разложения) Двойственные вариационные методы и итерационные процессы для решения плохо обусловленных СЛАУ. Метод сингулярного разложения и его регуляризация. Итерационное уточнение решения и числа обусловленности. Тактика решения плохо обусловленных СЛАУ и анализ программных средств.</p> <p>Понятие оптимального метода регуляризации Задача об оптимальном регуляризаторе при вычислении значений неограниченного оператора. Оценка погрешности.</p>
<b>Р2</b>	<p><b>Задача численного дифференцирования. Задачи на экстремум Регуляризация выпуклых проблем</b></p> <p><i>Лекции 1 час; самостоятельная работа аспиранта, 30 часов.</i></p>	<p>Регулярные алгоритмы для задачи численного дифференцирования: конечно--разностные схемы в <math>C(-\infty, \infty)</math> метод средних функций. Интерполяционные и сглаживающие сплайны. Абстрактные сплайны. Сравнительный анализ эффективности различных методов численного дифференцирования.</p> <p>Постановка задачи на экстремум функционала. Корректность по Адамару и Тихонову и их взаимосвязь. Достаточные условия корректности по Тихонову. Регуляризация с точными и приближёнными данными.</p> <p>Метод штрафных функций и регуляризация задачи выпуклого программирования в общем случае.</p> <p>Дискретная сходимость алгоритмов. Аппарат дискретной аппроксимации и дискретной сходимости. Достаточные условия сходимости дискретных аппроксимаций в задачах оптимизации.</p> <p>Конечномерная аппроксимация РА. Приложение к вариационному исчислению: обоснование методов Рунге и Эйлера, конечно--разностного метода.</p>
<b>Р3</b>	<p><b>Уравнения I-го рода. Примеры нелинейных неустойчивых проблем.</b></p> <p><i>Лекции 2 часа; самостоятельная работа аспиранта, 31 час.</i></p>	<p>Условия корректности операторных уравнений I-го рода. Уравнения, порождаемые интегральными операторами Фредгольма и Вольтерра и анализ их корректности. Уравнения с априорной информацией. Регуляризация уравнений I-го рода. Тихоновская регуляризация некорректных задач. Методы</p>

		<p>регуляризации уравнений типа свертки. Итеративная регуляризация. Правила останова итераций. <math>\alpha</math>-процессы и их регуляризованные аналоги. Нелинейные итерационные процессы для решения задач с априорной информацией.</p> <p>Конечномерная аппроксимация регуляризирующих алгоритмов. Конечномерная аппроксимация. Критерий сходимости. Приложения общей схемы: квадратурный метод, метод коллокации, проекционные методы. Теоремы сходимости. Методы саморегуляризации для уравнений Вольтерра.</p> <p>Практические рекомендации. Сравнительный анализ эффективности регулярных численных методов решения интегральных уравнений 1 рода.</p> <p>Примеры нелинейных неустойчивых проблем. Операторные и интегральные уравнения I-го рода (задачи гравиметрии и оптики), задачи оптимизации выпуклого функционала, вариационные неравенства. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Взаимосвязь различных постановок.</p>
--	--	--

### **3. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ, САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

#### **3.1. Практические занятия**

не предусмотрено

#### **3.2. Примерная тематика самостоятельной работы**

##### **3.2.1. Примерный перечень тем рефератов (эссе, творческих работ)**

не предусмотрено

##### **3.2.2. Примерная тематика *индивидуальных* или групповых проектов**

не предусмотрено

### **4. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

#### **4.1. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Применяются утвержденные на кафедре критерии оценивания достижений аспирантов по каждому контрольно-оценочному мероприятию. Система критериев оценивания опирается на три уровня освоения компонентов компетенций: пороговый, повышенный, высокий.

Компоненты компетенций	Признаки уровня освоения компонентов компетенций		
	пороговый	повышенный	высокий
<b>Знания</b>	Аспирант демонстрирует знание-знакомство, знание-копию: узнает объекты, явления и понятия, находит в них различия, проявляет знание источников получения информации, может осуществлять самостоятельно репродуктивные действия над знаниями путем самостоятельного воспроизведения и применения информации.	Аспирант демонстрирует аналитические знания: уверенно воспроизводит и понимает полученные знания, относит их к той или иной классификационной группе, самостоятельно систематизирует их, устанавливает взаимосвязи между ними, продуктивно применяет в знакомых ситуациях.	Аспирант может самостоятельно извлекать новые знания из окружающего мира, творчески их использовать для принятия решений в новых и нестандартных ситуациях.
<b>Умения</b>	Аспирант умеет корректно выполнять предписанные действия по инструкции, алгоритму в известной ситуации, самостоятельно выполняет действия по решению типовых задач, требующих выбора из числа известных методов, в предсказуемо изменяющейся ситуации	Аспирант умеет самостоятельно выполнять действия (приемы, операции) по решению нестандартных задач, требующих выбора на основе комбинации известных методов, в непредсказуемо изменяющейся ситуации	Аспирант умеет самостоятельно выполнять действия, связанные с решением исследовательских задач, демонстрирует творческое использование умений (технологий)
<b>Личностные качества</b>	Аспирант имеет низкую мотивацию учебной деятельности, проявляет безразличное, безответственное отношение к учебе, порученному делу	Аспирант имеет выраженную мотивацию учебной деятельности, демонстрирует позитивное отношение к обучению и будущей трудовой деятельности, проявляет активность.	Аспирант имеет развитую мотивацию учебной и трудовой деятельности, проявляет настойчивость и увлеченность, трудолюбие, самостоятельность, творческий подход.

## 4.2. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 4.2.1. Перечень примерных вопросов для зачета

не предусмотрено

### 4.2.2. Перечень примерных вопросов для экзамена

1. Плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)
2. Численное дифференцирование и задачи восстановления функций
3. Экстремальные задачи для выпуклого функционала.
4. Линейные интегральные уравнения типа свертки, Вольтерра и Фредгольма I-го рода.
5. Понятие некорректно поставленной задачи.

6. Корректность по Адамару, Тихонову и Фикера.
7. Множества корректности.
8. Лемма Хаусдорфа и её обобщения в линейном случае.
9. Мера обусловленности СЛАУ.
10. Анализ погрешности вычислений.
11. Число обусловленности: свойства и способы вычисления (оценки).
12. Обусловленность СЛАУ и устойчивость обратных матриц. Матрица Гильберта и другие примеры.
13. Обобщение понятия решения.
14. Псевдорешение.
15. Анализ метода наименьших квадратов.
16. Регулярный метод нахождения псевдорешения.
17. Метод регуляризации Тихонова.
18. Двойственные вариационные методы и итерационные процессы для решения плохо обусловленных СЛАУ.
19. Метод сингулярного разложения и его регуляризация.
20. Итерационное уточнение решения и числа обусловленности.
21. Тактика решения плохо обусловленных СЛАУ и анализ программных средств.
22. Задача об оптимальном регуляризаторе при вычислении значений неограниченного оператора. Оценка погрешности.
23. Задача численного дифференцирования
24. Регулярные алгоритмы для задачи численного дифференцирования: конечно--разностные схемы в  $C(-\infty, \infty)$  метод средних функций.
25. Интерполяционные и сглаживающие сплайны.
26. Абстрактные сплайны.
27. Сравнительный анализ эффективности различных методов численного дифференцирования.
28. Постановка задачи на экстремум функционала.
29. Корректность по Адамару и Тихонову и их взаимосвязь.
30. Достаточные условия корректности по Тихонову.
31. Регуляризация с точными и приближёнными данными.
32. Метод штрафных функций и регуляризация задачи выпуклого программирования в общем случае.
33. Дискретная сходимость алгоритмов.
34. Аппарат дискретной аппроксимации и дискретной сходимости
35. Достаточные условия сходимости дискретных аппроксимаций в задачах оптимизации.
36. Конечномерная аппроксимация PA.
37. Приложение к вариационному исчислению: обоснование методов Рунге и Эйлера, конечно--разностного метода.
38. Условия корректности операторных уравнений I-го рода.
39. Уравнения, порождаемые интегральными операторами Фредгольма и Вольтерра и анализ их корректности.
40. Уравнения с априорной информацией.
41. Регуляризация уравнений I-го рода.
42. Тихоновская регуляризация некорректных задач.
43. Методы регуляризации уравнений типа свертки.

44. Итеративная регуляризация. Правила останова итераций.
45.  $\alpha$ -процессы и их регуляризованные аналоги.
46. Нелинейные итерационные процессы для решения задач с априорной информацией.
47. Конечномерная аппроксимация. Критерий сходимости. Приложения общей схемы: квадратурный метод, метод коллокации, проекционные методы.
48. Теоремы сходимости. Методы саморегуляризации для уравнений Вольтерра
49. Сравнительный анализ эффективности регулярных численных методов решения интегральных уравнений 1 рода.
50. Операторные и интегральные уравнения I--го рода (задачи гравиметрии и оптики), задачи оптимизации выпуклого функционала, вариационные неравенства

## **5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **5.1.Рекомендуемая литература**

#### **5.1.1. Основная литература**

1. Васин В.В. Основы теории некорректных задач. Издательство СО РАН, 2020. 314 с.
2. Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 216 с.
3. Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: УРСС, 2013. 336 с.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректно поставленные задачи. Новосибирск. Сибирское научное издательство. 2009.

#### **5.1.2. Дополнительная литература**

1. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
2. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. УИФ "Наука", Екатеринбург, 1993.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
4. Иванов В.И., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978.
5. Васин В.В. Методы решения неустойчивых задач: Учебное пособие. Свердловск, изд-во УрГУ, 1989.
6. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.

### **5.2. Методические разработки**

Не используются

### **5.3. Программное обеспечение**

1. Microsoft office (Word, Excel, Power point);
2. Adobe Reader X
3. ChemOffice 2010
4. Isis Draw (Version 2.5)
5. Mercury (Version 2.4.5)
6. AutoDock (Version 1.5)

7. MestReNova (Version 6.0.2)
8. Open Babel (Version 2.3.1)
9. Avogadro (Version 1.0.3)
10. RasMol (Version 2.7.5.2)
11. Jmol (Version 12.0.45)
12. MiKTeX (<https://miktex.org>)

#### **5.4. Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы**

1. ScienceDirect: <http://www.sciencedirect.com>;
2. Web of Science: <http://apps.webofknowledge.com>;
3. Scopus: <http://www.scopus.com>;
4. Reaxys: <http://reaxys.com>;
5. SciFinder <https://scifinder.cas.org>
6. Espacenet <https://ru.espacenet.com>
7. РИНЦ <https://www.elibrary.ru>
8. Поисковая система EBSCO Discovery Service <http://lib.urfu.ru/course/view.php?id=141>;
9. Федеральный институт промышленной собственности <http://www1.fips.ru>;

#### **5.5. Электронные образовательные ресурсы**

1. Зональная научная библиотека <http://lib.urfu.ru>;
2. Каталоги библиотеки <http://lib.urfu.ru/course/view.php?id=76>;
3. Электронный каталог <http://opac.urfu.ru>;
4. Электронно-библиотечные системы <http://lib.urfu.ru/mod/resource/view.php?id=2330>;
5. Электронные ресурсы свободного доступа <http://lib.urfu.ru/course/view.php?id=75>;
6. Электронные ресурсы по подписке <http://lib.urfu.ru/mod/data/view.php?id=1379>.

## **6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Сведения об оснащённости дисциплины специализированным и лабораторным оборудованием**

Уральский федеральный университет имеет специальные помещения для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования. Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Уральский федеральный университет имеет материально-техническое обеспечение, необходимое для реализации программы аспирантуры, обеспечения дисциплин (модулей), научно-исследовательской работы и практик, в соответствии с требованиями к материально-техническому и учебно-методическому обеспечению направленности программы.