

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**
Гармонический анализ на евклидовой сфере

Код модуля
1156729(1)

Модуль
Гармонический анализ на евклидовой сфере

Екатеринбург

Оценочные материалы составлены автором(ами):

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Бабенко Александр Григорьевич	д. ф.-м. н., старший науч. сотр.	профессор	Кафедра математического анализа

Согласовано:

Управление образовательных программ

Ю.Д. Маева

Авторы:

- **Бабенко Александр Григорьевич, профессор, Кафедра математического анализа**

1. СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ Гармонический анализ на евклидовой сфере

1.	Объем дисциплины в зачетных единицах	3	
2.	Виды аудиторных занятий	Практические/семинарские занятия	
3.	Промежуточная аттестация	Зачет	
4.	Текущая аттестация	Контрольная работа	1
		Домашняя работа	1

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ (ИНДИКАТОРЫ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ Гармонический анализ на евклидовой сфере

Индикатор – это признак / сигнал/ маркер, который показывает, на каком уровне обучающийся должен освоить результаты обучения и их предъявление должно подтвердить факт освоения предметного содержания данной дисциплины, указанного в табл. 1.3 РПМ-РПД.

Таблица 1

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения (индикаторы)	Контрольно-оценочные средства для оценивания достижения результата обучения по дисциплине
1	2	3
ОПК-1 -Способен выявлять, формулировать и решать фундаментальные и прикладные задачи в области своей профессиональной деятельности и в междисциплинарных направлениях с использованием фундаментальных знаний и практических навыков	Д-1 - Демонстрировать аналитические умения и креативное мышление З-1 - Демонстрировать понимание фундаментальных принципов, методов и подходов к решению фундаментальных и прикладных задач в профильной области деятельности и междисциплинарных направлениях П-1 - Предлагать пути решения фундаментальных и прикладных задач в профильной области деятельности и междисциплинарных	Зачет Практические/семинарские занятия

	<p>направлениях, опираясь на фундаментальные законы и принципы с использованием соответствующих целям подходов и методов</p> <p>У-1 - Выявлять и определять цели и пути решения фундаментальных и прикладных задач в профильной области деятельности, опираясь на фундаментальные законы и принципы, с использованием соответствующих целям подходов и методов</p>	
<p>ПК-1 -Способен применять фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий (Современные проблемы математики)</p>	<p>З-3 - Строго формулировать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики</p> <p>П-1 - Иметь опыт решения актуальных и значимых проблем фундаментальной, прикладной и компьютерной математики</p>	<p>Домашняя работа</p> <p>Зачет</p> <p>Контрольная работа</p> <p>Практические/семинарские занятия</p>
<p>ПК-4 -Способен применять на практике новые научные принципы и методы исследований (Современные проблемы математики)</p>	<p>Д-1 - Системное мышление</p> <p>З-1 - Перечислить актуальные направления теоретических исследований и областей практического применения в выбранной предметной области</p> <p>У-2 - Формулировать и решать задачи, возникающие в ходе научно-исследовательской деятельности и требующие углубленных профессиональных знаний</p>	<p>Домашняя работа</p> <p>Зачет</p> <p>Контрольная работа</p>
<p>ПК-1 -Способен проводить научные исследования, на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности (Современные проблемы компьютерных наук)</p>	<p>З-3 - Строго формулировать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики</p> <p>П-1 - Иметь опыт решения актуальных и значимых проблем фундаментальной, прикладной и компьютерной математики</p>	<p>Домашняя работа</p> <p>Зачет</p> <p>Контрольная работа</p> <p>Практические/семинарские занятия</p>

ПК-4 -Способен использовать современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования (Современные проблемы компьютерных наук)	Д-1 - Системное мышление З-1 - Перечислить актуальные направления теоретических исследований и областей практического применения в выбранной предметной области У-2 - Формулировать и решать задачи, возникающие в ходе научно-исследовательской деятельности и требующие углубленных профессиональных знаний	Домашняя работа Зачет Контрольная работа
--	---	--

3. ПРОЦЕДУРЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ В БАЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА БРС)

3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

1. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на лекциях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лекциям – нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – не предусмотрено		
2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – 1		
Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>домашняя работа</i>	2,17	60
<i>контрольная работа</i>	2,17	40
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям– 0.5		
Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям– зачет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям– 0.5		

3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий –не предусмотрено		
Текущая аттестация на лабораторных занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям -не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям –нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		
4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий –не предусмотрено		
Текущая аттестация на онлайн-занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям -не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям –нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – не предусмотрено		

3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта

Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено		
Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено		

4. КРИТЕРИИ И УРОВНИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

4.1. В рамках БРС применяются утвержденные на кафедре/институте критерии (признаки) оценивания достижений студентов по дисциплине модуля (табл. 4) в рамках контрольно-оценочных мероприятий на соответствие указанным в табл.1 результатам обучения (индикаторам).

Таблица 4

Критерии оценивания учебных достижений обучающихся

Результаты обучения	Критерии оценивания учебных достижений, обучающихся на соответствие результатам обучения/индикаторам
Знания	Студент демонстрирует знания и понимание в области изучения на уровне указанных индикаторов и необходимые для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.

Умения	Студент может применять свои знания и понимание в контекстах, представленных в оценочных заданиях, демонстрирует освоение умений на уровне указанных индикаторов и необходимых для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Опыт /владение	Студент демонстрирует опыт в области изучения на уровне указанных индикаторов.
Другие результаты	Студент демонстрирует ответственность в освоении результатов обучения на уровне запланированных индикаторов. Студент способен выносить суждения, делать оценки и формулировать выводы в области изучения. Студент может сообщать преподавателю и коллегам своего уровня собственное понимание и умения в области изучения.

4.2 Для оценивания уровня выполнения критериев (уровня достижений обучающихся при проведении контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля) используется универсальная шкала (табл. 5).

Таблица 5

Шкала оценивания достижения результатов обучения (индикаторов) по уровням

Характеристика уровней достижения результатов обучения (индикаторов)				
№ п/п	Содержание уровня выполнения критерия оценивания результатов обучения (выполненное оценочное задание)	Шкала оценивания		
		Традиционная характеристика уровня		Качественная характеристика уровня
1.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты в полном объеме, замечаний нет	Отлично (80-100 баллов)	Зачтено	Высокий (В)
2.	Результаты обучения (индикаторы) в целом достигнуты, имеются замечания, которые не требуют обязательного устранения	Хорошо (60-79 баллов)		Средний (С)
3.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты не в полной мере, есть замечания	Удовлетворительно (40-59 баллов)		Пороговый (П)
4.	Освоение результатов обучения не соответствует индикаторам, имеются существенные ошибки и замечания, требуется доработка	Неудовлетворительно (менее 40 баллов)	Не зачтено	Недостаточный (Н)
5.	Результат обучения не достигнут, задание не выполнено	Недостаточно свидетельств для оценивания		Нет результата

5. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

5.1. Описание аудиторных контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля

5.1.1. Практические/семинарские занятия

Примерный перечень тем

1. Введение
2. Гармонические функции
3. Ядро Пуассона для шара
4. Оператор Лапласа – Бельтрами на сфере. Сферические и шаровые функции
5. Применение к краевым задачам
6. Положительная определенность

Примерные задания

Задачи, приводящие к уравнению Лапласа.

Основные свойства гармонических функций. Определения и примеры. Свойства инвариантности. Свойство среднего значения. Принцип максимума.

Ядро Пуассона для круга (двумерный случай). Лемма симметрии. Ядро Пуассона для шара (многомерный случай). Задача Дирихле для шара и ее решение.

Оператор Лапласа в сферической системе. Оператор Лапласа – Бельтрами на сфере и его свойства.

Размерность подпространства сферических функций заданной степени. Выражение сферических функций в сферической системе координат. Уравнение Лежандра. Производящая функция и рекуррентное соотношение. Базисность. Ортогональность сферических функций и функций Лежандра.

Применение сферических функций для решения краевых задач в сферически симметричных областях.

Неотрицательная определенность матрицы Грамма. Положительная определенность многочленов Лежандра. Положительная определенность ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра). Схемы Дельсарта и Дельсарта – Юдина в задачах оптимального расположения точек на сфере (контактные числа евклидовых пространств, минимизация потенциальной энергии системы заданного числа одинаково заряженных частиц на сфере).

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2. Описание внеаудиторных контрольно-оценочных мероприятий и средств текущего контроля по дисциплине модуля

Разноуровневое (дифференцированное) обучение.

Базовый

5.2.1. Контрольная работа

Примерный перечень тем

1. Формула Грина и ее приложения к теореме о среднем значении для гармонических функций.
2. Положительная определенность. Схемы Дельсарта и Дельсарта – Юдина в задачах оптимального расположения точек на сфере.

Примерные задания

1. Функция называется радиальной, если ее значение в точке x зависит только от $|x|$. Доказать, что радиальная гармоническая функция внутри единичного шара евклидова пространства \mathbb{R}^n является постоянной.
2. Пусть $P(x, \xi)$ – ядро Пуассона для единичного шара евклидова пространства \mathbb{R}^n . Требуется привести другое доказательство (отличное от стандартного) того, что $\int_S P(x, \xi) d\xi = 1$, где S – единичная сфера евклидова пространства \mathbb{R}^n , показав, что функция $x \mapsto \int_S P(x, \xi) d\xi$ является гармонической и радиальной.
3. Предположим, что u является непрерывной в замкнутом единичном шаре евклидова пространства \mathbb{R}^n , и пусть для каждой внутренней точки x единичного шара существует положительное число $r(x) \leq 1 - |x|$ такое, что $u(x) = \int_S u(x + r(x)\xi) d\xi$. Доказать, что u является гармонической внутри единичного шара.
1. Используя положительную определенность ультрасферических многочленов, найти с помощью схемы Дельсарта максимум минимального углового расстояния сферического кода мощности N на единичной сфере евклидова пространства \mathbb{R}^n при $2 \leq N \leq n+1$.
2. Найти контактные числа евклидовых пространств $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^8, \mathbb{R}^{24}$.
3. Применив схему Дельсарта – Юдина, решить задачу минимизации потенциальной энергии системы N одинаково заряженных частиц на единичной сфере евклидова пространства \mathbb{R}^n при $2 \leq N \leq n+1$.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.2. Домашняя работа

Примерный перечень тем

1. Гармонические функции. Инвариантность гармонических функций относительно сдвига, растяжения и ортогональных преобразований
2. Сферические и шаровые функции
3. Применение сферических функций для решения краевых задач в сферически симметричных областях

Примерные задания

1. Показать, что если u и v являются вещественнозначными гармоническими функциями, то uv является гармонической тогда и только тогда, когда скалярное произведение $(\text{grad } u, \text{grad } v)$ равно нулю.
2. Предположим, что область Ω связна и u является такой вещественнозначной гармонической функцией на Ω , что u^2 – гармоническая. Доказать, что u является постоянной.
3. Верно ли такое утверждение без предположения, что u является вещественнозначной?
4. Пусть $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является таким линейным преобразованием, что $u \circ T$ является гармонической на \mathbb{R}^n для любой гармонической функции u на \mathbb{R}^n . Доказать, что T совпадает с ортогональным преобразованием (с точностью до скалярного множителя).

1. Предположим, что p является полиномом на \mathbb{R}^n таким, что его сужение на единичную евклидову сферу S тождественно равно нулю. Доказать, что существует такой полином q , что $p(x) = (1 - |x|^2)q(x)$.
 2. Для функции f непрерывной на единичной сфере S через $P[f]$ обозначим интеграл Пуассона, который задает функцию на единичном шаре формулой $P[f](x) = \int_S f(\xi) P(x, \xi) d\xi$, где $P(x, \xi) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|}$ — ядро Пуассона для задачи Дирихле на единичном шаре евклидова пространства \mathbb{R}^n .
 3. Пусть q — однородный многочлен на \mathbb{R}^n и $u = P[q|_S]$. Доказать, что u является однородным полиномом той же самой степени, что и q тогда и только тогда, когда q является гармоническим.
 4. Предположим, что f является однородным полиномом четной (соответственно, нечетной) степени на \mathbb{R}^n . Доказать, что $P[f]$ является полиномом, содержащим только члены четной (соответственно, нечетной) степени.
1. Показать, что $\Delta(|x|^t) = t(t + n - 2)|x|^{t-2}$, где $x \in \mathbb{R}^n$.
 2. Пусть f и g являются полиномами на \mathbb{R}^n . Доказать, что существует единственный полином p такой, что $p|_S = f|_S$ и $\Delta p = g$.
 3. Обозначим через $P_e(x, \xi) = \frac{|x|^2 - 1}{|x - \xi|}$ внешнее ядро Пуассона для задачи Дирихле во внешности единичного шара евклидова пространства \mathbb{R}^n . Доказать, что формула $P_e[f](x) = \int_S f(\xi) P_e(x, \xi) d\xi$ задает гармоническое продолжение непрерывной на единичной сфере S функции f на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.3. Описание контрольно-оценочных мероприятий промежуточного контроля по дисциплине модуля

5.3.1. Зачет

Список примерных вопросов

1. Определение неотрицательно определенной функции. Свойства неотрицательно определенных функций.
2. Доказать, что при любом фиксированном вещественном r функция e^{ix} является неотрицательно определенной.
3. Определение матрицы Грама. Доказать неотрицательную определенность матрицы Грама.
4. Пусть натуральное число $m > 1$. Какие функции называются неотрицательно определенными функциями на единичной сфере евклидова пространства? Свойства таких функций.
5. Доказательство положительной определенности ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра), основанное на формуле Лапласа.
6. Пространство однородных многочленов заданной степени. Шаровые многочлены заданной степени. Сферические гармоники заданной степени.
7. Размерность пространства однородных многочленов двух переменных заданной степени.

8. Размерность пространства шаровых многочленов двух переменных заданной степени.
 9. Размерность пространства однородных многочленов трех переменных заданной степени.
 10. Размерность пространства шаровых многочленов трех переменных заданной степени.
 11. Определение гармонических функций. Свойства инвариантности.
 12. Свойство среднего значения и принцип максимума для гармонических функций.
 13. Ядро Пуассона для круга (двумерный случай).
 14. Лемма симметрии. Ядро Пуассона для шара (многомерный случай).
 15. Задача Дирихле для шара и ее решение.
 16. Оператор Лапласа в сферической системе координат.
 17. Выражение сферических функций в сферической системе координат. Уравнение Лежандра. Производящая функция и рекуррентное соотношение. Ортогональность сферических функций и функций Лежандра.
 18. Применение сферических функций для решения краевых задач в сферически симметричных областях.
 19. Положительная определенность многочленов Лежандра.
 20. Положительная определенность ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра).
 21. Схема Дельсарта в задаче о контактном числе евклидова пространства.
 22. Схемы Дельсарта – Юдина в задаче минимизации потенциальной энергии системы заданного числа одинаково заряженных частиц на сфере.
- LMS-платформа – не предусмотрена

5.4 Содержание контрольно-оценочных мероприятий по направлениям воспитательной деятельности

Направления воспитательной деятельности сопрягаются со всеми результатами обучения компетенций по образовательной программе, их освоение обеспечивается содержанием всех дисциплин модулей.