

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**
Основы гармонического анализа

Код модуля
1156728(1)

Модуль
Гармонический анализ и его применение

Екатеринбург

Оценочные материалы составлены автором(ами):

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Бабенко Александр Григорьевич	д. ф.-м. н., старший науч. сотр.	профессор	Кафедра математического анализа

Согласовано:

Управление образовательных программ

Ю.Д. Маева

Авторы:

- **Бабенко Александр Григорьевич, профессор, Кафедра математического анализа**

1. СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ Основы гармонического анализа

1.	Объем дисциплины в зачетных единицах	3	
2.	Виды аудиторных занятий	Практические/семинарские занятия	
3.	Промежуточная аттестация	Зачет	
4.	Текущая аттестация	Контрольная работа	1
		Домашняя работа	1

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ (ИНДИКАТОРЫ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ Основы гармонического анализа

Индикатор – это признак / сигнал/ маркер, который показывает, на каком уровне обучающийся должен освоить результаты обучения и их предъявление должно подтвердить факт освоения предметного содержания данной дисциплины, указанного в табл. 1.3 РПМ-РПД.

Таблица 1

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения (индикаторы)	Контрольно-оценочные средства для оценивания достижения результата обучения по дисциплине
1	2	3
ОПК-1 -Способен выявлять, формулировать и решать фундаментальные и прикладные задачи в области своей профессиональной деятельности и в междисциплинарных направлениях с использованием фундаментальных знаний и практических навыков	Д-1 - Демонстрировать аналитические умения и креативное мышление З-1 - Демонстрировать понимание фундаментальных принципов, методов и подходов к решению фундаментальных и прикладных задач в профильной области деятельности и междисциплинарных направлениях П-1 - Предлагать пути решения фундаментальных и прикладных задач в профильной области деятельности и междисциплинарных направлениях, опираясь на	Домашняя работа Зачет Контрольная работа Практические/семинарские занятия

	<p>фундаментальные законы и принципы с использованием соответствующих целям подходов и методов</p> <p>У-1 - Выявлять и определять цели и пути решения фундаментальных и прикладных задач в профильной области деятельности, опираясь на фундаментальные законы и принципы, с использованием соответствующих целям подходов и методов</p>	
<p>ПК-1 -Способен применять фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий (Современные проблемы математики)</p>	<p>Д-1 - Демонстрировать аналитические и системные умения, способность к поиску информации</p> <p>З-1 - Изложить актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики</p> <p>П-1 - Иметь опыт решения актуальных и значимых проблем фундаментальной, прикладной и компьютерной математики</p> <p>У-2 - Решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики в профильной области деятельности и междисциплинарных направлениях</p>	<p>Домашняя работа</p> <p>Зачет</p> <p>Контрольная работа</p>
<p>ПК-1 -Способен проводить научные исследования, на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности (Современные проблемы компьютерных наук)</p>	<p>Д-1 - Демонстрировать аналитические и системные умения, способность к поиску информации</p> <p>З-1 - Изложить актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики</p> <p>П-1 - Иметь опыт решения актуальных и значимых проблем фундаментальной, прикладной и компьютерной математики</p> <p>У-2 - Решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной</p>	<p>Домашняя работа</p> <p>Зачет</p> <p>Контрольная работа</p>

	математики в профильной области деятельности и междисциплинарных направлениях	
--	---	--

3. ПРОЦЕДУРЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ В БАЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА БРС)

3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

1. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на лекциях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лекциям – нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – не предусмотрено		
2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – 1		
Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>контрольная работа</i>	1,17	40
<i>домашняя работа</i>	1,17	60
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям – 0.5		
Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям – зачет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям – 0.5		
3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на лабораторных занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям – нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		

4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий –не предусмотрено		
Текущая аттестация на онлайн-занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям -не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям –нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – не предусмотрено		

3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта

Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено		
Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено		

4. КРИТЕРИИ И УРОВНИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

4.1. В рамках БРС применяются утвержденные на кафедре/институте критерии (признаки) оценивания достижений студентов по дисциплине модуля (табл. 4) в рамках контрольно-оценочных мероприятий на соответствие указанным в табл.1 результатам обучения (индикаторам).

Таблица 4

Критерии оценивания учебных достижений обучающихся

Результаты обучения	Критерии оценивания учебных достижений, обучающихся на соответствие результатам обучения/индикаторам
Знания	Студент демонстрирует знания и понимание в области изучения на уровне указанных индикаторов и необходимые для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Умения	Студент может применять свои знания и понимание в контекстах, представленных в оценочных заданиях, демонстрирует освоение умений на уровне указанных индикаторов и необходимых для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Опыт /владение	Студент демонстрирует опыт в области изучения на уровне указанных индикаторов.
Другие результаты	Студент демонстрирует ответственность в освоении результатов обучения на уровне запланированных индикаторов. Студент способен выносить суждения, делать оценки и формулировать выводы в области изучения. Студент может сообщать преподавателю и коллегам своего уровня собственное понимание и умения в области изучения.

4.2 Для оценивания уровня выполнения критериев (уровня достижений обучающихся при проведении контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля) используется универсальная шкала (табл. 5).

Таблица 5

Шкала оценивания достижения результатов обучения (индикаторов) по уровням

Характеристика уровней достижения результатов обучения (индикаторов)				
№ п/п	Содержание уровня выполнения критерия оценивания результатов обучения (выполненное оценочное задание)	Шкала оценивания		
		Традиционная характеристика уровня		Качественная характеристика уровня
1.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты в полном объеме, замечаний нет	Отлично (80-100 баллов)	Зачтено	Высокий (В)
2.	Результаты обучения (индикаторы) в целом достигнуты, имеются замечания, которые не требуют обязательного устранения	Хорошо (60-79 баллов)		Средний (С)
3.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты не в полной мере, есть замечания	Удовлетворительно (40-59 баллов)		Пороговый (П)
4.	Освоение результатов обучения не соответствует индикаторам, имеются существенные ошибки и замечания, требуется доработка	Неудовлетворительно но (менее 40 баллов)	Не зачтено	Недостаточный (Н)
5.	Результат обучения не достигнут, задание не выполнено	Недостаточно свидетельств для оценивания		Нет результата

5. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

5.1. Описание аудиторных контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля

5.1.1. Практические/семинарские занятия

Примерный перечень тем

1. Введение в теорию меры и интеграла Лебега
2. Ряды Фурье
3. Преобразование Фурье в пространстве $L_1=L_1(\mathbb{R}^m)$
4. Преобразование Фурье в пространстве $L_2=L_2(\mathbb{R}^m)$
5. Приложения

Примерные задания

Мера Лебега ограниченного подмножества числовой прямой. Измеримые функции

(определение, алгебраические свойства). Интеграл Лебега от ограниченной функции по множеству конечной меры. Интеграл Лебега от неограниченной функции. Неравенства Гельдера и Минковского.

Мера и интеграл Лебега в \mathbb{R}^m . Теорема Фубини. Пространства $L_p = L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < \infty$. Свертка двух функций.

Ортогональные, полные и замкнутые системы. Существование полной ортонормальной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Тригонометрические ряды Фурье. Теорема Римана о поведении коэффициентов Фурье суммируемой функции. Принцип локализации Римана.

Преобразование Фурье в пространстве $L_1 = L_1(\mathbb{R}^m)$. Простейшие свойства преобразования Фурье; теорема Римана – Лебега. Преобразование Фурье свертки суммируемых функций. Дифференцирование преобразования Фурье суммируемой функции. Преобразование Фурье производной в L_1 суммируемой функции. Методы суммирования интегралов. Ядра Абеля и Гаусса–Вейерштрасса; их преобразования Фурье. Теорема умножения для преобразований Фурье суммируемых функций. Обращение в L_1 преобразования Фурье суммируемой функции. Дифференцирование почти всюду интеграла Лебега локально суммируемой функции. Точки Лебега локально суммируемой функции. Поточечное обращение преобразования Фурье суммируемой функции.

Преобразование Фурье в пространстве $L_2 = L_2(\mathbb{R}^m)$. Лемма о норме в L_2 преобразования Фурье функций из $L_1 \cap L_2$. Конструкция преобразования Фурье функции из L_2 . Свойство изометричности оператора Фурье в L_2 . Конструкция обратного оператора для оператора Фурье на L_2 . Равенство Парсеваля и обобщенное равенство Парсеваля.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение уравнения Лапласа в полуплоскости и круге. Принцип неопределенности Гейзенберга. Формула суммирования Пуассона. Теорема Винера – Пэли. Преобразование Радона. Решение задачи томографии с помощью преобразования Фурье. Преобразование Фурье дискретных сигналов. Оконное преобразование Фурье.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2. Описание внеаудиторных контрольно-оценочных мероприятий и средств текущего контроля по дисциплине модуля

Разноуровневое (дифференцированное) обучение.

Базовый

5.2.1. Контрольная работа

Примерный перечень тем

1. Ряды Фурье.

2. Преобразование Фурье в пространствах $L_2 = L_2(\mathbb{R}^m)$ и $L_1 = L_1(\mathbb{R}^m)$.

Примерные задания

1. Разложите в ряд Фурье в интервале $(0, 2a)$ характеристическую функцию интервала $(0, a)$. Постройте график суммы полученного ряда Фурье.
2. Разложите в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ функцию $f(x) = x^2$. Постройте график суммы полученного ряда Фурье.
3. Разложите в ряд Фурье по системе синусов в интервале $(0, \pi)$ функцию $f(x) = x^2$. Постройте график суммы полученного ряда Фурье.

1. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1); \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$

Докажите, что оно не суммируемо на \mathbb{R} .

2. Найдите косинус-преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-x}$.

3. Найдите синус-преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-x}$.

4. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-x} \sin x, & x > 0. \end{cases}$

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.2. Домашняя работа

Примерный перечень тем

1. Мера и интеграл Лебега.
2. Преобразование Фурье в пространстве $L^1 = L^1(\mathbb{R}^m)$
3. Применение преобразования Лапласа к решению ОДУ. Дискретное преобразование Фурье.

Примерные задания

1. Приведите пример подмножества плоскости, измеримого по Лебегу, но не измеримого по Жордану.
2. Пусть $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} [n, n + \frac{1}{2}] \times [n, n + \frac{1}{2^n}]$. Докажите, что E измеримо по Лебегу и найдите его меру. Изобразите схематично множество E на плоскости.

3. Пусть $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin x, & x \notin \mathbb{Q}; \\ \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Докажите, что функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на любом отрезке $[a, b]$ и найдите значение интеграла (значение $f(0)$ можно задать произвольным образом).

5. Пусть функция $f(x)$ липшицева на отрезке $[0, 1]$. Докажите, что образ всякого измеримого подмножества $A \subset [0, 1]$ нулевой меры измерим и его мера равно нулю.

Верно ли это утверждение для непрерывной на отрезке функции?

6. Докажите, что множество измеримых ограниченных на множестве конечной меры функций, принимающих лишь счетное число значений, плотно в пространстве $L_p(E)$ при всех $p \in [1, \infty]$.

1. Пусть функция $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Для $h > 0$ функцию

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f(u) du = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x+u) du \quad (1)$$

называют функцией Стеклова для функции f . Найдите функцию $g = g_h$ такую, что

$$f_h(x) = (f * g)(x). \text{ Докажите, что } |\hat{f}_h(x)| \leq |\hat{f}(x)|, x \in \mathbb{R}.$$

2. Обобщите теоремы о дифференцировании преобразования Фурье и о преобразовании Фурье производной на производные старших порядков.
3. Докажите, что f и \hat{f} не могут одновременно иметь компактный носитель.

1. Решите дифференциальное уравнение $y''(t) + y(t) = \sin t$ и постройте график решения при нулевых начальных условиях.

2. Решите дифференциальное уравнение $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 1$ и постройте график решения при нулевых начальных условиях.

3. Реализуйте на любом подходящем языке дискретное преобразование Фурье.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.3. Описание контрольно-оценочных мероприятий промежуточного контроля по дисциплине модуля

5.3.1. Зачет

Список примерных вопросов

1. Мера Лебега на прямой.
2. Измеримые функции (определение, алгебраические свойства).
3. Интеграл Лебега ограниченной измеримой функции, его простейшие свойства.
4. Мера и интеграл Лебега в \mathbb{R}^n .
5. Теорема Фубини.
6. Ортогональные, полные и замкнутые системы. Существование полной ортонормальной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ряды Фурье. Равенство Парсеваля.
7. Тригонометрические ряды Фурье. Принцип локализации.
8. Сходимость ряда Фурье.
9. Равномерная сходимость ряда Фурье.
10. Почленное дифференцирование тригонометрических рядов.
11. Преобразование Фурье суммируемой функции. Простейшие свойства. Теорема Римана – Лебега.
12. Свертка двух функций. Свертка двух функций из $L(\mathbb{R}^n)$. Преобразование Фурье свертки суммируемых функций.
13. Дифференцирование преобразования Фурье суммируемой функции.
14. Преобразование Фурье производной в L^1 суммируемой функции.
15. Методы суммирования (расходящихся интегралов).
16. Теорема умножения для преобразований Фурье суммируемых функций (вариант равенства Парсеваля).
17. Обращение в L^1 преобразования Фурье суммируемой функции.

18. Преобразование Фурье ядра Гаусса. Обращение преобразования Фурье.
 19. Ядро Абеля. Его преобразование Фурье. Обращение преобразования Фурье.
 20. Поточечное обращение преобразования Фурье суммируемой функции с суммируемым преобразованием Фурье.
 21. Точки Лебега локально суммируемой функции. Поточечное обращение преобразования Фурье суммируемой функции.
 22. Суммируемая непрерывная функция с неотрицательным преобразованием Фурье.
 23. Норма в L_2 преобразования Фурье функции из $L_1 \cap L_2$.
 24. Конструкция преобразования Фурье в L_2 .
 25. Свойство изометричности оператора Фурье в L_2 . Равенство Парсеваля.
 26. Теорема умножения для преобразований Фурье в L_2 .
 27. Обобщенное равенство Парсеваля.
 28. Конструкция обратного оператора для оператора Фурье на L_2 .
 29. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение уравнения Лапласа в полуплоскости и круге.
 30. Преобразование Фурье дискретных сигналов. Оконное преобразование Фурье.
- LMS-платформа – не предусмотрена

5.4 Содержание контрольно-оценочных мероприятий по направлениям воспитательной деятельности

Направления воспитательной деятельности сопрягаются со всеми результатами обучения компетенций по образовательной программе, их освоение обеспечивается содержанием всех дисциплин модулей.