

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**  
Функциональный анализ

**Код модуля**  
1156429

**Модуль**  
Функциональный анализ

**Екатеринбург**

Оценочные материалы составлены автором(ами):

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Бовкун Вадим Андреевич	кандидат физико-математических наук, без ученого звания	Доцент	математического анализа
2	Мельникова Ирина Валерьяновна	доктор физико-математических наук, профессор	Профессор	математического анализа
3	Филатова Мария Александровна	кандидат физико-математических наук, без ученого звания	Доцент	математического анализа

**Согласовано:**

Управление образовательных программ

Ю.Д. Маева

**Авторы:**

- Бовкун Вадим Андреевич, Доцент, математического анализа
- Мельникова Ирина Валерьяновна, Профессор, математического анализа
- Филатова Мария Александровна, Доцент, математического анализа

**1. СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ Функциональный анализ**

1.	Объем дисциплины в зачетных единицах	3	
2.	Виды аудиторных занятий	Лекции Практические/семинарские занятия	
3.	Промежуточная аттестация	Зачет	
4.	Текущая аттестация	Контрольная работа	2
		Домашняя работа	2

**2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ (ИНДИКАТОРЫ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ Функциональный анализ**

Индикатор – это признак / сигнал/ маркер, который показывает, на каком уровне обучающийся должен освоить результаты обучения и их предъявление должно подтвердить факт освоения предметного содержания данной дисциплины, указанного в табл. 1.3 РПМ-РПД.

Таблица 1

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения (индикаторы)	Контрольно-оценочные средства для оценивания достижения результата обучения по дисциплине
1	2	3
ОПК-1 -Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	Д-1 - Демонстрировать навыки самообразования З-1 - Демонстрировать понимание основных закономерностей, законов, теорий математики, их взаимосвязь с другими дисциплинами П-1 - Демонстрировать навыки применения простейших математических теорий и моделей для решения задач профессиональной деятельности У-1 - Определять пути решения задач профессиональной деятельности, опираясь на знания основных	Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2 Зачет Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Лекции Практические/семинарские занятия

	закономерностей, законов, теории математики	
ПК-1 -Способен демонстрировать и применять в научно-исследовательской и прикладной деятельности базовые знания математических и естественных наук, современного математического аппарата, современных языков программирования и информационных технологий (Математика и компьютерные науки)	З-1 - Формулировать основные теоремы и понятия математических и естественных наук П-1 - Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике и информатике У-1 - Решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук	Зачет Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Лекции Практические/семинарские занятия

### 3. ПРОЦЕДУРЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ В БАЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА БРС)

#### 3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

<b>1. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – 0.5</b>		
<b>Текущая аттестация на лекциях</b>	<b>Сроки – семестр, учебная неделя</b>	<b>Максимальная оценка в баллах</b>
<i>Работа на лекциях и ведение конспектов</i>	4,34	100
<b>Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – 0.5</b>		
<b>Промежуточная аттестация по лекциям – зачет</b>		
<b>Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – 0.5</b>		
<b>2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – 0.5</b>		
<b>Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях</b>	<b>Сроки – семестр, учебная неделя</b>	<b>Максимальная оценка в баллах</b>
<i>Контрольная работа 1</i>	4,22	25
<i>Контрольная работа 2</i>	4,34	25
<i>Домашняя работа 1</i>	4,16	25
<i>Домашняя работа 2</i>	4,33	25

<b>Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям– 1</b>		
<b>Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям–нет</b>		
<b>Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям– не предусмотрено</b>		
<b>3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий –не предусмотрено</b>		
<b>Текущая аттестация на лабораторных занятиях</b>	<b>Сроки – семестр, учебная неделя</b>	<b>Максимальная оценка в баллах</b>
<b>Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям -не предусмотрено</b>		
<b>Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям –нет</b>		
<b>Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено</b>		
<b>4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий –не предусмотрено</b>		
<b>Текущая аттестация на онлайн-занятиях</b>	<b>Сроки – семестр, учебная неделя</b>	<b>Максимальная оценка в баллах</b>
<b>Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям -не предусмотрено</b>		
<b>Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям –нет</b>		
<b>Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – не предусмотрено</b>		

### **3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта**

<b>Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта</b>	<b>Сроки – семестр, учебная неделя</b>	<b>Максимальная оценка в баллах</b>
<b>Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено</b>		
<b>Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено</b>		

## **4. КРИТЕРИИ И УРОВНИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ**

4.1. В рамках БРС применяются утвержденные на кафедре/институте критерии (признаки) оценивания достижений студентов по дисциплине модуля (табл. 4) в рамках контрольно-оценочных мероприятий на соответствие указанным в табл.1 результатам обучения (индикаторам).

Таблица 4

### **Критерии оценивания учебных достижений обучающихся**

<b>Результаты обучения</b>	<b>Критерии оценивания учебных достижений, обучающихся на соответствие результатам обучения/индикаторам</b>
----------------------------	---

Знания	Студент демонстрирует знания и понимание в области изучения на уровне указанных индикаторов и необходимые для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Умения	Студент может применять свои знания и понимание в контекстах, представленных в оценочных заданиях, демонстрирует освоение умений на уровне указанных индикаторов и необходимых для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Опыт /владение	Студент демонстрирует опыт в области изучения на уровне указанных индикаторов.
Другие результаты	Студент демонстрирует ответственность в освоении результатов обучения на уровне запланированных индикаторов. Студент способен выносить суждения, делать оценки и формулировать выводы в области изучения. Студент может сообщать преподавателю и коллегам своего уровня собственное понимание и умения в области изучения.

4.2 Для оценивания уровня выполнения критериев (уровня достижений обучающихся при проведении контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля) используется универсальная шкала (табл. 5).

Таблица 5

#### Шкала оценивания достижения результатов обучения (индикаторов) по уровням

Характеристика уровней достижения результатов обучения (индикаторов)				
№ п/п	Содержание уровня выполнения критерия оценивания результатов обучения (выполненное оценочное задание)	Шкала оценивания		
		Традиционная характеристика уровня		Качественная характеристика уровня
1.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты в полном объеме, замечаний нет	Отлично (80-100 баллов)	Зачтено	Высокий (В)
2.	Результаты обучения (индикаторы) в целом достигнуты, имеются замечания, которые не требуют обязательного устранения	Хорошо (60-79 баллов)		Средний (С)
3.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты не в полной мере, есть замечания	Удовлетворительно (40-59 баллов)		Пороговый (П)
4.	Освоение результатов обучения не соответствует индикаторам, имеются существенные ошибки и замечания, требуется доработка	Неудовлетворительно (менее 40 баллов)	Не зачтено	Недостаточный (Н)
5.	Результат обучения не достигнут, задание не выполнено	Недостаточно свидетельств для оценивания		Нет результата

## 5. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

### 5.1. Описание аудиторных контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля

#### 5.1.1. Лекции

Самостоятельное изучение теоретического материала по темам/разделам лекций в соответствии с содержанием дисциплины (п. 1.2. РПД)

#### 5.1.2. Практические/семинарские занятия

Примерный перечень тем

1. Линейные нормированные пространства.
2. Полнота.
3. Сепарабельность.
4. Сравнение норм.
5. Компактность.
6. Гильбертовы пространства
7. Интеграл Лебега.
8. Линейные операторы и линейные функционалы в ЛНП
9. Вполне непрерывные операторы
10. Сопряженные операторы

Примерные задания

Метрические, линейные нормированные пространства. Классические примеры линейных нормированных пространств.

Топология метрических и линейных нормированных пространств, сходимость последовательности в метрических и линейных нормированных пространствах.

Непрерывные отображения, их свойства.

Полные пространства. Принцип вложенных шаров. Пополнение, теорема о пополнении (без доказательства). Принцип сжимающих отображений, его применения. Теорема Бэра о категориях, мощность полного метрического пространства без изолированных точек (без доказательства).

Сепарабельные пространства, примеры.

Несепарабельность пространства, в котором существует несчетное дискретное подмножество. Сепарабельность подпространства сепарабельного пространства.

Сравнение норм в линейных нормированных пространствах, эквивалентность норм в линейных нормированных пространствах.

Компактность в метрических пространствах, свойства компактных подмножеств метрического пространства. Секвенциальная компактность, вполне ограниченность, теорема

Хаусдорфа. Эквивалентность определений компактности и секвенциальной компактности в метрических пространствах.

Теорема Арцела (без доказательства). Свойства отображений, непрерывных на компакте.  
Лемма Рисса. Конечномерность и компактность.

Евклидовы, гильбертовы пространства, определения, примеры. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства, существование ортогональной проекции на любое подпространство в гильбертовом пространстве. Ортогональные, полные и замкнутые системы. Существование полной ортонормальной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств.

Мера Лебега ограниченного подмножества числовой прямой. Измеримые функции (определение, алгебраические свойства). Интеграл Лебега и его свойства. Интеграл Лебега от неограниченной функции. Неравенства Гельдера и Минковского.

Пространства  $L_p[a;b]$  (норма, полнота).

Линейные непрерывные операторы и функционалы. Эквивалентность свойств непрерывности и ограниченности для линейного оператора. Норма линейного ограниченного оператора. Пространство линейных непрерывных операторов  $L(X;Y)$ . Полнота пространства  $L(X;Y)$ , где  $Y$  – полное. Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха и ее следствия.

Общий вид линейных

непрерывных функционалов в пространствах  $l_p$ , гильбертовом и конечномерном.

Вполне непрерывные операторы, определение, примеры, свойства.

Сопряженные и эрмитово сопряженные операторы, определения, примеры, свойства.

LMS-платформа – не предусмотрена

## **5.2. Описание внеаудиторных контрольно-оценочных мероприятий и средств текущего контроля по дисциплине модуля**

Разноуровневое (дифференцированное) обучение.

### **Базовый**

#### **5.2.1. Контрольная работа № 1**

Примерный перечень тем

1. 1. Метрические, линейные нормированные, гильбертовы пространства

Примерные задания



1. а). Доказать, что замкнутый шар является замкнутым множеством, открытый – открытым. Доказать, что сфера является замкнутым множеством.  
 б). Доказать, что замыкание открытого шара содержится в замкнутом шаре (с центром в той же точке, того же радиуса). Привести пример, когда это включение строгое.
2. Будет ли заданная функция нормой, метрикой, нарисовать единичный шар в данной метрике, например
  - а).  $\|(x, y, z)\| = \max\{2|z|, \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ,  $(x, y, z) \in R^3$ , нарисовать единичный шар с центром в точке  $(0,0,0)$ .
  - б).  $\|(x, y, z)\| = \max\{2|x| + |y|, |z|\}$ ,  $(x, y, z) \in R^3$ , нарисовать единичный шар с центром в точке  $(0,0,0)$ .
3. Пусть  $(R, \rho)$  пространство, в котором метрика определяется формулой:  $\rho(x, y) = |\arctg(x) - \arctg(y)|$ . Является ли данное пространство полным? Если нет, то описать его пополнение.
4. Исследовать отображение на непрерывность
  - а).  $f: C[0;1] \rightarrow \tilde{L}_1[0;1]$  задано формулой  $f(x) = \sin(x(t))$
  - б).  $Id: C[0;1] \rightarrow \tilde{L}_1[0;1]$  тождественное. (будет ли обратное отображение непрерывным?)
  - в).  $f: l_p \rightarrow l_q$  — тождественное на пересечении.

LMS-платформа – не предусмотрена

## 5.2.2. Контрольная работа № 2

Примерный перечень тем

### 1. Линейные операторы

Примерные задания

1. Является ли данное множество предкомпактным?
  - а).  $M = \{x \in C[0;1] : x(t) = t^\alpha \quad \alpha \in R\}$
  - б).  $M = \{x \in C[0;1] : x(t) = \cos(t-a) \quad \alpha \in R\}$
2. Можно ли в пространстве  $C[a, b]$  определить скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства?
3. Найдите норму функционала  $Ax = \int_0^{0.5} x(t)dt - \int_{0.3}^1 x(t)dt$ , определенного на пространстве  $C[0;1]$  и проверьте, является ли он достижимым.
4. Найдите норму оператора  $Ax = (\xi_1, \sqrt{2}\xi_2, \dots, \sqrt{n}\xi_n, \dots)$ , действующего из  $l_2$  в  $l_2$  и проверьте, является ли он достижимым.
5. Последовательность операторов  $A_n x = (0, \dots, 0, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$  действует в пространстве  $l_2$ . Исследуйте эту последовательность на сильную и поточечную сходимость.
6. Оператор  $A$  действует на пространстве  $l_1$  по формуле  $Ax = (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \dots)$ . Найдите оператор, сопряженный к оператору  $A$ .

LMS-платформа – не предусмотрена

## 5.2.3. Домашняя работа № 1

Примерный перечень тем

1. Топология метрических и линейных нормированных пространств. Сходимость последовательностей в линейных нормированных пространствах. Полнота. Сепарабельность. Сравнение норм.

#### Примерные задания

1. Задачи на топологию метрических и линейных нормированных пространств (построить замыкание множества, внутренность множества, доказать, что множество замкнуто, открыто). Например, доказать, что  $\Gamma(A)$  граница множества  $A$  замкнута и внутренность множества равна  $A \setminus \Gamma(A)$ .
2. Пусть  $X = \{x(t)\}$  — множество функций, определенных, ограниченных на всей числовой оси и принимающих лишь рациональные значения, метрика на множестве  $X$  определяется формулой:  $\rho(x; y) = \sup \{ |x(t) - y(t)|, t \in R \}$ .

Докажите, что пространство  $(X; \rho)$  не является сепарабельным.

Докажите, что пространство  $(X; \rho)$  не полно.

3. При каких  $n$  последовательность  $\xi_k^n = \begin{cases} t g \frac{1}{k}, & k \leq n \\ 1 - e^{\frac{1}{k}}, & k > n \end{cases}$  сходится в пространстве  $l_p$ ?

4. Пусть  $(R, \rho)$  пространство, в котором метрика определяется формулой:  $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$ . Является ли данное пространство полным? Если нет, то описать его пополнение.

5. Сравнить на  $X$  нормы. Например,

а). В пространстве  $C^1[a; b]$  сравнить 3 нормы:  $\|x\|_1 = |x(1)| + \int_0^1 |x(t)| dt$ ,

$\|x\|_2 = |x(1)| + \int_0^1 |x'(t)| dt$ , стандартная норма в  $C^1[a; b]$

б). В пространстве  $\ell_p$  сравнить 2 нормы: стандартная норма  $\ell_p$ , стандартная норма  $c_0$ .

LMS-платформа – не предусмотрена

### 5.2.4. Домашняя работа № 2

#### Примерный перечень тем

1. Исследование заданных множеств на предкомпактность в классических линейных нормированных пространствах. Ортогональное дополнение множества в гильбертовом пространстве.

#### Примерные задания

1. При каких условиях на числовое множество  $A$  данное множество  $M$  будет предкомпактным в пространстве  $C[a, b]$ ?
  - а).  $M = \{x \in C[0; 1] : x(t) = \sin(\alpha t), \alpha \in A \subset R\}$ ;
  - б).  $M = \{x \in C[0; 1] : x(t) = e^{t+\alpha}, \alpha \in A \subset R\}$ .
2. Найти в  $\ell_2$  ортогональное дополнение до множества  $M = \{(\xi_1, \xi_2, \dots) : \xi_1 + \xi_3 - \xi_4 = 0\}$ .

LMS-платформа – не предусмотрена

## 5.3. Описание контрольно-оценочных мероприятий промежуточного контроля по дисциплине модуля

### 5.3.1. Зачет

#### Список примерных вопросов

1. Метрические и линейные нормированные пространства. Определения и примеры.

2. Топология метрических пространств (открытые множества, замкнутые множество, внутренность, замыкание, предельная точка множества, сходящиеся последовательности и их свойства).

3. Непрерывные отображения, их свойства.

4. Полные пространства. Принцип вложенных шаров.

5. Пополнение, теорема о пополнении (без доказательства).

6. . Принцип сжимающих отображений

7. Сепарабельные пространства

8. . Сравнение норм в линейных нормированных пространствах. Компактность в метрических пространствах, свойства компактных подмножеств метрического пространства.

9. Секвенциальная компактность, вполне ограниченность, теорема Хаусдорфа. Эквивалентность определений компактности и секвенциальной компактности в метрических пространствах. Теорема Арцела. Конечномерность и компактность.

10. Конечномерность и компактность. Евклидовы, гильбертовы пространства, определения, примеры. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства. Ортогональные, полные и замкнутые системы. Существование полной ортонормальной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ряды Фурье. Равенство Парсеваля.

11. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Мера Лебега. Измеримые функции (определение, алгебраические свойства). Интеграл Лебега и его простейшие свойства. Неравенства Гельдера и Минковского (только формулировки). Пространства  $l_p$ ,  $l_r$ . Линейные непрерывные операторы и функционалы. Эквивалентность свойств непрерывности и ограниченности для линейного оператора.

12. Норма линейного ограниченного оператора. Пространство линейных непрерывных операторов  $L(X;Y)$ . Полнота пространства  $L(X;Y)$ , где  $Y$  – полное. Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха и ее следствия. Общий вид линейных непрерывных функционалов в пространствах  $l_p$ , гильбертовом и конечномерном. Вполне непрерывные операторы, определение, примеры, свойства.

13. Сопряженные и эрмитово-сопряженные операторы. Обратные операторы. Теорема Банаха о непрерывности обратного оператора. Спектр и резольвентное множество линейного непрерывного оператора. Линейные интегральные уравнения. Методы решения интегральных уравнений (метод неопределенных коэффициентов для уравнений с вырожденным ядром, метод малого параметра).

LMS-платформа – не предусмотрена

#### 5.4 Содержание контрольно-оценочных мероприятий по направлениям воспитательной деятельности

Направление воспитательной деятельности	Вид воспитательной деятельности	Технология воспитательной деятельности	Компетенция	Результаты обучения	Контрольно-оценочные мероприятия
Профессиональное воспитание	учебно-исследовательская, научно-исследовательская	Технология формирования уверенности и готовности к	ПК-1	З-1 У-1	Зачет Лекции Практические/семинарские занятия

	ая	самостоятельной успешной профессиональ ной деятельности			
--	----	--	--	--	--