

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**
Алгебра

Код модуля
1156858(1)

Модуль
Математические основы обеспечения
информационной безопасности

Екатеринбург

Оценочные материалы составлены автором(ами):

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Белоусова Вероника Игоревна	к.ф.-м.н.	доцент	ДИТ и А
2	Веретенников Борис Михайлович	к.ф.-м.н., доцент	доцент	ДИТ и А

Согласовано:

Управление образовательных программ

Т.Г. Комарова

Авторы:

- Белоусова Вероника Игоревна, доцент, ДИТ и А
- Веретенников Борис Михайлович, доцент, ДИТ и А

1. СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ Алгебра

1.	Объем дисциплины в зачетных единицах	6	
2.	Виды аудиторных занятий	Лекции Практические/семинарские занятия	
3.	Промежуточная аттестация	Зачет	
4.	Текущая аттестация	Контрольная работа	4
		Домашняя работа	3

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ (ИНДИКАТОРЫ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ Алгебра

Индикатор – это признак / сигнал/ маркер, который показывает, на каком уровне обучающийся должен освоить результаты обучения и их предъявление должно подтвердить факт освоения предметного содержания данной дисциплины, указанного в табл. 1.3 РПМ-РПД.

Таблица 1

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения (индикаторы)	Контрольно-оценочные средства для оценивания достижения результата обучения по дисциплине
1	2	3
УК-1 -Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий (Информационная безопасность телекоммуникационных систем)	З-1 - Сделать обзор основных принципов критического мышления, методов анализа и оценки информации, полученной в том числе с помощью цифровых средств З-2 - Объяснять основные принципы критического мышления, методы анализа и оценки достижений современной цивилизации, включая достижения глобальной цифровизации П-1 - Выявлять и анализировать проблемную ситуацию, выделяя ее структурные составляющие и связи между ними П-2 - Определять пути решения поставленных задач, в том	Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2 Домашняя работа № 3 Зачет Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Контрольная работа № 3 Контрольная работа № 4 Лекции Практические/семинарские занятия

	<p>числе в цифровой среде, опираясь на методики поиска, системного анализа и коррекции информации</p> <p>У-1 - Критически анализировать информацию, формировать собственное мнение и формулировать аргументы для защиты своей позиции</p> <p>У-2 - Определять достоверность и обоснованность выводов, выявлять и анализировать типовые ошибки в рассуждениях и когнитивные искажения в работе с информацией</p> <p>У-3 - Критически оценивать надежность источников информации в условиях неопределенности и избытка/недостатка информации для решения поставленных задач, в том числе в цифровой среде</p>	
ОПК-3 -Способен использовать математические методы, необходимые для решения задач профессиональной деятельности	<p>З-1 - Привести примеры использования методов моделирования и математического анализа в решении задач, относящихся к профессиональной деятельности</p> <p>З-2 - Перечислить и дать краткую характеристику освоенным за время обучения пакетам прикладных программ, используемых для моделирования при решении задач в области профессиональной деятельности</p> <p>П-1 - Решать поставленные задачи, относящиеся к области профессиональной деятельности, используя освоенные за время обучения пакеты прикладных программ для моделирования и математического анализа</p> <p>У-1 - Обоснованно выбрать возможные методы</p>	<p>Домашняя работа № 1</p> <p>Домашняя работа № 2</p> <p>Домашняя работа № 3</p> <p>Зачет</p> <p>Контрольная работа № 1</p> <p>Контрольная работа № 2</p> <p>Контрольная работа № 3</p> <p>Контрольная работа № 4</p> <p>Лекции</p> <p>Практические/семинарские занятия</p>

	<p>моделирования и математического анализа для предложенных задач профессиональной деятельности</p> <p>У-2 - Выбирать пакеты прикладных программ для использования их в моделировании при решении поставленных задач в области профессиональной деятельности</p>	
<p>УК-1 -Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий (Информационно-аналитические системы безопасности)</p>	<p>З-1 - Сделать обзор основных принципов критического мышления, методов анализа и оценки информации, полученной в том числе с помощью цифровых средств</p> <p>З-2 - Объяснять основные принципы критического мышления, методы анализа и оценки достижений современной цивилизации, включая достижения глобальной цифровизации</p> <p>П-1 - Выявлять и анализировать проблемную ситуацию, выделяя ее структурные составляющие и связи между ними</p> <p>П-2 - Определять пути решения поставленных задач, в том числе в цифровой среде, опираясь на методики поиска, системного анализа и коррекции информации</p> <p>У-1 - Критически анализировать информацию, формировать собственное мнение и формулировать аргументы для защиты своей позиции</p> <p>У-2 - Определять достоверность и обоснованность выводов, выявлять и анализировать типовые ошибки в рассуждениях и когнитивные искажения в работе с информацией</p> <p>У-3 - Критически оценивать надежность источников информации в условиях</p>	<p>Домашняя работа № 1</p> <p>Домашняя работа № 2</p> <p>Домашняя работа № 3</p> <p>Зачет</p> <p>Контрольная работа № 1</p> <p>Контрольная работа № 2</p> <p>Контрольная работа № 3</p> <p>Контрольная работа № 4</p> <p>Лекции</p> <p>Практические/семинарские занятия</p>

	неопределенности и избытка/недостатка информации для решения поставленных задач, в том числе в цифровой среде	
--	---	--

3. ПРОЦЕДУРЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ В БАЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА БРС)

3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

1. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – 0.80		
Текущая аттестация на лекциях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>контрольная работа</i>	1,4	50
<i>контрольная работа</i>	1,10	50
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – 0.40		
Промежуточная аттестация по лекциям – зачет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – 0.60		
2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – 0.20		
Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>домашняя работа</i>	1,8	50
<i>домашняя работа</i>	1,15	50
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям – 1.00		
Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям – нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям – 0.00		
3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на лабораторных занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям – нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		

4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий –не предусмотрено		
Текущая аттестация на онлайн-занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям -не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям –нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – не предусмотрено		

3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта

Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено		
Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено		

3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

2. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – 0.80		
Текущая аттестация на лекциях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>контрольная работа</i>	2,4	50
<i>контрольная работа</i>	2,8	50
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – 0.40		
Промежуточная аттестация по лекциям – зачет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – 0.60		
2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – 0.20		
Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>домашняя работа</i>	2,15	100
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям– 1.00		
Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям–нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям– 0.00		
3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий –не предусмотрено		

Текущая аттестация на лабораторных занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям –не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям –нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		
4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий –не предусмотрено		
Текущая аттестация на онлайн-занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям –не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям –нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – не предусмотрено		

3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта

Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено		
Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено		

4. КРИТЕРИИ И УРОВНИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

4.1. В рамках БРС применяются утвержденные на кафедре/институте критерии (признаки) оценивания достижений студентов по дисциплине модуля (табл. 4) в рамках контрольно-оценочных мероприятий на соответствие указанным в табл.1 результатам обучения (индикаторам).

Таблица 4

Критерии оценивания учебных достижений обучающихся

Результаты обучения	Критерии оценивания учебных достижений, обучающихся на соответствие результатам обучения/индикаторам
Знания	Студент демонстрирует знания и понимание в области изучения на уровне указанных индикаторов и необходимые для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Умения	Студент может применять свои знания и понимание в контекстах, представленных в оценочных заданиях, демонстрирует освоение умений на уровне указанных индикаторов и необходимых для

	продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Опыт /владение	Студент демонстрирует опыт в области изучения на уровне указанных индикаторов.
Другие результаты	Студент демонстрирует ответственность в освоении результатов обучения на уровне запланированных индикаторов. Студент способен выносить суждения, делать оценки и формулировать выводы в области изучения. Студент может сообщать преподавателю и коллегам своего уровня собственное понимание и умения в области изучения.

4.2 Для оценивания уровня выполнения критериев (уровня достижений обучающихся при проведении контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля) используется универсальная шкала (табл. 5).

Таблица 5

Шкала оценивания достижения результатов обучения (индикаторов) по уровням

Характеристика уровней достижения результатов обучения (индикаторов)				
№ п/п	Содержание уровня выполнения критерия оценивания результатов обучения (выполненное оценочное задание)	Шкала оценивания		
		Традиционная характеристика уровня		Качественная характеристика уровня
1.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты в полном объеме, замечаний нет	Отлично (80-100 баллов)	Зачтено	Высокий (В)
2.	Результаты обучения (индикаторы) в целом достигнуты, имеются замечания, которые не требуют обязательного устранения	Хорошо (60-79 баллов)		Средний (С)
3.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты не в полной мере, есть замечания	Удовлетворительно (40-59 баллов)		Пороговый (П)
4.	Освоение результатов обучения не соответствует индикаторам, имеются существенные ошибки и замечания, требуется доработка	Неудовлетворительно (менее 40 баллов)	Не зачтено	Недостаточный (Н)
5.	Результат обучения не достигнут, задание не выполнено	Недостаточно свидетельств для оценивания		Нет результата

5. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

5.1. Описание аудиторных контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля

5.1.1. Лекции

Самостоятельное изучение теоретического материала по темам/разделам лекций в соответствии с содержанием дисциплины (п. 1.2. РПД)

5.1.2. Практические/семинарские занятия

Примерный перечень тем

1. Алгоритм Евклида, модифицированный алгоритм Евклида и связанные с этим теоремы.
2. Свойства взаимно простых чисел.
3. Свойства отношения сравнения по модулю n и свойства классов вычетов по модулю n .
4. Теорема о порядке Z/nZ .
5. Операции в Z/nZ . Теорема о кольце вычетов по модулю n .
6. Теорема о поле вычетов по модулю n .
7. Решение линейных уравнений в Z/nZ . Прimitивные классы. Функция Эйлера и ее вычисление для np , где p — простое.
8. Теорема Эйлера.
9. Мультипликативность функции Эйлера.
10. Китайская теорема об остатках
11. Теорема о поле комплексных чисел. .
12. Свойства операции сопряжения.
13. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.
14. Теорема об извлечении корня n -й степени из комплексного числа.
15. Свойства модуля комплексного числа
16. Теорема о кольце многочленов. Доказательство ассоциативности произведения многочленов.
17. Алгоритмы Евклида для многочленов и соответствующие теоремы. Свойства взаимно простых многочленов.
18. Теорема о делении с остатком
19. Теорема о неприводимом разложении многочлена.
20. Основная теорема алгебры.
21. Теорема Безу и ее следствие для комплексного многочлена.
22. Кратность корня и ее связь с производной многочлена.
23. Две теоремы о мнимых корнях вещественного многочлена.
24. Теорема о неприводимом разложении вещественного многочлена.
25. Теорема о разложении правильной многочленной дроби в сумму простейших.
26. Операции над матрицами и их свойства. Транспонирование матрицы и его свойства. Многочлен от матрицы. Теорема об изменении чётности перестановки при транспозиции. Определение определителя n -го порядка и его свойства.
27. Определение линейного пространства. Следствия из аксиом. Примеры. Эквивалентность двух определений линейной зависимости и ее простейшие свойства. Необходимое условие линейной зависимости. Основная теорема линейной зависимости. Базис и размерность линейного пространства. Матрица перехода. Теорема о связи координат вектора в разных базисах. Матрица обратного перехода. Критерий базиса.

Ранг и база системы векторов. Ранги эквивалентных систем. Теорема об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях.

27. Теорема о ранге матрицы. Теоремы об однородных линейных системах уравнений. Теорема о структуре общего решения НЛСУ. Теорема о размерности суммы подпространств.

28. Определение евклидова пространства. Следствия из аксиом. Примеры.

29. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника.

30. Теорема о линейной независимости ортогональной системы векторов.

31. Теорема о существовании ортогонального базиса. Теорема о разложении евклидова пространства в прямую сумму.

32. Расстояние в евклидовом пространстве между точками и плоскостями. Метод наименьших квадратов. Выражение скалярного произведения через матрицу Грама. Изменение матрицы Грама при переходе к другому базису

33. Определение линейного отображения и следствия из него. Примеры.

34. Формула линейного оператора через его матрицу.

35. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

36. Основные свойства собственных векторов линейного оператора.

37. Ядро и образ линейного оператора. Дефект и ранг оператора.

38. Теорема о сумме дефекта и ранга оператора.

39. Теорема о совпадении рангов матрицы и оператора и ее следствия для рангов произведений матриц. Достаточный признак линейного оператора простой структуры. Теорема о жордановой нормальной форме матрицы и существовании канонического базиса. Существование и единственность сопряженного оператора. Нахождение его матрицы в произвольном базисе.

40. Основные свойства самосопряженного оператора. Спектральная теорема. Основные свойства ортогонального оператора. Спектральная теорема. Спектральная теорема для унитарного оператора

41. Матричная запись квадратной формы. Приведение квадратичной формы ортогональным преобразованием к каноническому виду. Критерий Сильвестра. Закон инерции.

42. Определении группы. Примеры и следствия из аксиом.

43. Симметрическая группа. Знакопеременная группа.

44. Разложение группы на смежные классы по подгруппе.

45. Нормальные подгруппы и фактор-группы.

46. Гомоморфизмы и изоморфизмы.

47. Кольца и поля. Основные примеры. Идеалы в кольцах и фактор-кольца.

48. Гомоморфизмы колец. Кольца главных идеалов. Поля частных

Примерные задания

Занятие 7. Комплексные числа.

Задача 1. Выполнить деление чисел $\frac{1+j}{-2+3j}$.

Решение. $\frac{1+j}{-2+3j} = \frac{(1+j)(-2-3j)}{(-2+3j)(-2-3j)} = \frac{-2-2j-3j-3j^2}{4-9j^2} = \frac{-2-5j+3}{4+9} = \frac{1-5j}{13}$

Ответ: $\frac{1-5j}{13}$.

Задача 2. Выполнить действие $\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^{15}$.

Решение. Возвести комплексное число в целую положительную степень – значит, это число умножить пятнадцать раз само на себя.

Заметим, что $(1+j)^2 = 1+2j+j^2 = 1+2j-1 = 2j$.

Тогда

$$\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^{15} = \frac{\left(\frac{(1+j)^2}{2}\right)^7 \cdot (1+j)}{\left(\sqrt{2}\right)^{15}} = \frac{(2j)^7 \cdot (1+j)}{2^7 \cdot \sqrt{2}} = \frac{j^7 \cdot (1+j)}{\sqrt{2}} = \frac{-j \cdot (1+j)}{\sqrt{2}} = \frac{-j-j^2}{\sqrt{2}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{1-j}{\sqrt{2}}$.

Задача 3. Решить систему $\begin{cases} (2-j)x + (2+3j)y = 3j, \\ (4-3j)x - (1+5j)y = 12. \end{cases}$

Решение. $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ – формулы Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-j & 2+3j \\ 4-3j & -(1+5j) \end{vmatrix} = (2-j)(-1-5j) - (4-3j)(2+3j) = -2-15j-4-9j^2 = -9-39j.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3j & 2+3j \\ 12 & -(1+5j) \end{vmatrix} = -3j(1+5j) - 12(2+3j) = -9-39j.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2-j & 3j \\ 4-3j & 12 \end{vmatrix} = 12(2-j) - 3j(4-3j) = 15-24j.$$

Занятие 9. Алгебра матриц.

Задача 1. Написать матрицу $A = (a_{ij})_{5 \times 6}$, если

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j > 3 \\ 1, & i = j \leq 3 \\ 5, & i = j - 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Решение. Матрица A – матрица размера 5×6 с элементами:

$a_{44} = a_{55} = 2$; $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$; $a_{12} = a_{23} = a_{44} = a_{45} = a_{56} = 5$; все остальные элементы равны 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A – матрица усеченного вида.

Задача 2. Вычислить $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Можно ли перемножить матрицы в обратном порядке?

Решение. Матрица $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ размерности 2×3 .

Матрица $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ размерности 3×2 . Произведение этих матриц – матрица размерности 2×2 .

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & -26 \\ 6 & 49 \end{pmatrix}$$

Если умножать матрицы в обратном порядке, то матрица размерности 3×2 будет умножаться на матрицу размерности 2×3 . Результат – матрица размерности 3×3 .

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-9-39j}{-24-15j} = \frac{(9+39j)(24-15j)}{24^2-(15j)^2} = \frac{801+801j}{801} = 1+j.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{15-24j}{-(24+15j)} = \frac{(15-24j)(24-15j)}{-801} = \frac{-801j}{-801} = j.$$

Ответ: $x = 1+j$; $y = j$.

Задача 4. Решить квадратное уравнение $z^2 - (1+3j)z - 4 = 0$. Его корни изобразить на плоскости.

$$\text{Решение. } z_{1,2} = \frac{1+3j \pm \sqrt{(1+3j)^2 + 16}}{2} = \frac{1+3j \pm \sqrt{8+6j}}{2};$$

$$\sqrt{8+6j} = a+bj \Rightarrow (\sqrt{8+6j})^2 = (a+bj)^2 \Rightarrow$$

$$8+6j = a^2 - b^2 + 2abj \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \end{cases}$$

$$a=3, b=1 \text{ или } a=-3, b=-1.$$

$$z_1 = \frac{1+3j+(3+j)}{2} = \frac{4+4j}{2} = 2+2j, z_2 = \frac{1+3j-(3+j)}{2} = \frac{-2+2j}{2} = -1+j.$$

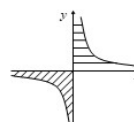
Ответ: $z_1 = 2+2j, z_2 = -1+j$.

Задача 5. Построить множество точек, удовлетворяющих соотношению $0 \leq \operatorname{Im}(z^2 - 1) \leq 2$.

Решение.

$$0 \leq \operatorname{Im}(x+iy)^2 - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \operatorname{Im}(x^2 - y^2 - 1 + 2xyj) \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2xy \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq xy \leq 1.$$

Этому двойному неравенству удовлетворяет множество точек на плоскости Oxy , расположенных между координатными осями $x=0, y=0$ и гиперболой с уравнением $y = \frac{1}{x}$. На рисунке – это заштрихованная область.



$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 27 & -6 \\ 33 & 27 & 12 \\ -1 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Вычислить $B \cdot A \cdot A \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A \cdot A \cdot B = \emptyset.$$

Ответ: $B \cdot A \cdot A \cdot B = \emptyset$.

Задача 3. Найти $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $f(x) = 3x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 7$.

Решение. $f(A) = 3A^5 - 4A^4 - 10A^3 + 3A^2 - 7E$.

$$\text{Вычислим } A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ значит } A^5 = A^4 = \emptyset.$$

$$\text{Тогда } f(A) = 3\emptyset^5 - 4\emptyset^4 - 10\emptyset^3 + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } f(A) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2. Описание внеаудиторных контрольно-оценочных мероприятий и средств текущего контроля по дисциплине модуля

Разноуровневое (дифференцированное) обучение.

Базовый

5.2.1. Контрольная работа № 1

Примерный перечень тем

1. Матрицы

Примерные задания

Вариант № 1

1. Вычислить $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Можно ли перемножить матрицы в обратном порядке?

2. Найти $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 5$.

3. Найти A^{-1} двумя способами, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -3 & 7 & -5 \\ 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричные уравнения:

а) $B \cdot X = A$,

б) $X \cdot A = B$,

в) $2A \cdot X - 2 \cdot X = B$,

если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.2. Контрольная работа № 2

Примерный перечень тем

1. Комплексные числа

Примерные задания

Вариант 1.

1. Представить в тригонометрической форме числа:
 - 1) $2-2j$;
 - 2) -1 ;
 - 3) $\frac{\pi}{4}$;
 - 4) $-1-j\sqrt{3}$;
 - 5) $-2+5j$.
2. Решить систему:
$$\begin{cases} (2-j)x+(3+2j)y=3-6j \\ (1-j)x-(2+j)y=-1 \end{cases}$$
3. Выполнить указанные действия:
 - 1) $\left(\frac{1+j}{4}\right)^7$;
 - 2) $(1+j\sqrt{3})^6$;
 - 3) $f(z)=(z-1)^5+\frac{1}{z-3}$. Найти $f(1+2j)$.
4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
 - 1) $\sqrt[12]{1+j}$;
 - 2) $\sqrt[4]{-1}$;
 - 3) $\sqrt[3]{8}$;
 - 4) $\sqrt{8-6j}$.
5. Решить квадратное уравнение: $z^2+(1-2j)z-2j=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.
6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
 - 1) $|z-3j|\geq 3$;
 - 2) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=1$;
 - 3) $|z-2j|=|z+2j|$.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.3. Контрольная работа № 3

Примерный перечень тем

1. Линейные операторы

Примерные задания

Контрольная работа «Линейные операторы»

Вариант 1.

1. Доказать, что оператор $A: A(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$ является

линейным.

Найти матрицу оператора в базисах (i, j, k) и $(e_1 = i + j, e_2 = k, e_3 = i + 2k)$.

2. Оператор $A_1: R^2 \rightarrow R^2$ зеркально отражает все геометрические векторы плоскости XOY относительно прямой $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, а оператор $A_2: R^2 \rightarrow R^2$ ортогонально проектирует их на прямую $y = -\sqrt{3}x$. Как действуют на произвольный фиксированный вектор x операторы: $4A_2 + 2A_1; A_2A_1$?

Задачу решить геометрически и аналитически.

3. Оператор A в некотором базисе задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти образ и ядро оператора.

4. Линейный оператор $A: R^3 \rightarrow R^3$ в базисе (e_1', e_2') имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 11 & -30 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$. Известно, что $e_1' = -e_2, e_2' = e_1 + 3e_2$ и базис (e_1, e_2) ортонормирован. Найти матрицу сопряженного оператора A' в базисе (e_1', e_2') .

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.4. Контрольная работа № 4

Примерный перечень тем

1. Квадратичные формы

Примерные задания

Вариант 1.

Привести уравнения 2-го порядка к каноническому виду; определить их тип; выполнить построение.

- $2x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 4xy - 6xz - 12yz = 60;$
- $7x^2 - y^2 + 6xy - 24\sqrt{10}x - 8\sqrt{10}y + 40 = 0;$
- $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xy + 6xz + 12yz = 0.$

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.5. Домашняя работа № 1

Примерный перечень тем

1. Линейный оператор

Примерные задания

I

Вариант 1

1. Выяснить, является ли оператор $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ линейным. В случае линейности найти матрицы оператора в базисах $B = \{i, j, k\}$ и $B' = \{e_1 = k + j, e_2 = i - 3j, e_3 = 2i\}$, если

а) $\hat{A}(\bar{x}) = (3x_2, x_1/x_3, x_2 - 4x_1)$;

б) $\hat{A}(\bar{x}) = \bar{a}(\bar{a}, \bar{x})$, где $\bar{a} = (0, 1, -1)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

2. Оператор \hat{A} зеркально отражает все геометрические векторы плоскости Oxy относительно прямой $y = x/\sqrt{3}$, а оператор \hat{B} поворачивает их вокруг начала координат на угол $\varphi = \pi/2$. Найти матрицы операторов: $\hat{C} = \hat{B}\hat{A}$, $\hat{D} = 3\hat{B}^{-1} + 3\hat{A} + \hat{E}$ и образ вектора $\bar{x} = (2\sqrt{3}, 0)$ при указанных преобразованиях.

3. Найти ранг, дефект, образ и ядро линейного оператора \hat{A} заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.* Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрическое действие оператора, определяемого этой матрицей в базисе (i, j, k) .

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.6. Домашняя работа № 2

Примерный перечень тем

1. Собственные значения. Собственные векторы

Примерные задания

Домашнее задание «Собственные значения. Собственные векторы»

Вариант 1.

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных матрицами в некотором базисе:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Привести матрицы линейных операторов, если возможно, к диагональному виду и найти соответствующий базис

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Даны собственные значения и собственные векторы линейного оператора в некотором базисе.

Найти матрицу оператора в этом базисе.

$$2 \quad (1, 0, 1)$$

$$-2 \quad (1, 1, 1)$$

$$4 \quad (1, 1, 0)$$

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.7. Домашняя работа № 3

Примерный перечень тем

1. Алгебраические структуры

Примерные задания

Контрольная работа N 2. Элементы теории групп. Задание N 1

1. Пусть задано множество комплексных чисел вида: $a = a_0 + ia_1$, где a_0, a_1 – принадлежат полю действительных чисел. Ввести операции сложения и умножения комплексных чисел и построить алгебру комплексных чисел. Является ли эта алгебра коммутативной по умножению? Является ли эта алгебра линейной алгеброй с делением?

2. Постройте циклическую группу, порождаемую перестановками вида: $\begin{pmatrix} 1 \dots 2 \dots 3 \dots 4 \dots 5 \\ 5 \dots 3 \dots 1 \dots 4 \dots 2 \end{pmatrix}$

3. Задан многоугольник списком координат вершин:

x	-1	2	1	-2	0
y	1	2	-2	-2	0

Матрица аффинного преобразования имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 \dots -1 \dots 4 \\ -2 \dots 2 \dots -1 \end{pmatrix}$ Вычислите координаты вершин после преобразования, центры формы фигуры и площади до и после преобразования.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.3. Описание контрольно-оценочных мероприятий промежуточного контроля по дисциплине модуля

5.3.1. Зачет

Список примерных вопросов

1. Алгоритм Евклида, модифицированный алгоритм Евклида и связанные с этим теоремы. Свойства взаимно простых чисел. Свойства отношения сравнения по модулю n и свойства классов вычетов по модулю n . Теорема о порядке $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2. Операции в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Теорема о кольце вычетов по модулю n . Теорема о поле вычетов по модулю n . Решение линейных уравнений в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Прimitives классы. Функция Эйлера и ее вычисление для pn , где p — простое. Теорема Эйлера. Мультипликативность функции Эйлера. Китайская теорема об остатках

3. Теорема о поле комплексных чисел. Свойства операции сопряжения. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра. Теорема об извлечении корня n -й степени из комплексного числа. Свойства модуля комплексного числа.

4. Теорема о кольце многочленов. Доказательство ассоциативности произведения многочленов. Алгоритмы Евклида для многочленов и соответствующие теоремы. Свойства взаимно простых многочленов. Теорема о делении с остатком. Теорема о неприводимом разложении многочлена. Основная теорема алгебры.

5. Теорема Безу и ее следствие для комплексного многочлена. Кратность корня и ее связь с производной многочлена. Две теоремы о мнимых корнях вещественного многочлена. Теорема о неприводимом разложении вещественного многочлена. Теорема о разложении правильной многочленной дроби в сумму простейших. Схема Горнера и разложение многочлена по степеням $x-x_0$.

6. Операции над матрицами и их свойства. Транспонирование матрицы и его свойства. Многочлен от матрицы. Теорема об изменении чётности перестановки при транспозиции. Определение определителя n -го порядка и его свойства. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Теорема Крамера для ЛСУ n -го порядка. Метод Гаусса и его применение к решению ЛСУ и матричных уравнений, а также к вычислению определителей. Определитель Вандермонда.

7. Определение линейного пространства. Следствия из аксиом. Примеры. Эквивалентность двух определений линейной зависимости и ее простейшие свойства. Необходимое условие линейной зависимости. Основная теорема линейной зависимости.

Базис и размерность линейного пространства. Матрица перехода. Теорема о связи координат вектора в разных базисах.

8. Матрица обратного перехода. Критерий базиса. Ранг и база системы векторов. Ранги эквивалентных систем. Теорема об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы.

9. Теоремы об однородных линейных системах уравнений. Теорема о структуре общего решения НЛСУ. Теорема о размерности суммы подпространств.

10. Определение евклидова пространства. Следствия из аксиом. Примеры. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Теорема о линейной независимости ортогональной системы векторов. Теорема о существовании ортогонального базиса. Теорема о разложении евклидова пространства в прямую сумму.

11. Расстояние в евклидовом пространстве между точками и плоскостями. Метод наименьших квадратов. Выражение скалярного произведения через матрицу Грама. Изменение матрицы Грама при переходе к другому базису.

12. Определение линейного отображения и следствия из него. Примеры. Формула линейного оператора через его матрицу. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Основные свойства собственных векторов линейного оператора.

13. Ядро и образ линейного оператора. Дефект и ранг оператора. Теорема о сумме дефекта и ранга оператора. Теорема о совпадении рангов матрицы и оператора и ее следствия для рангов произведений матриц. Достаточный признак линейного оператора простой структуры.

14. Теорема о жордановой нормальной форме матрицы и существовании канонического базиса. Существование и единственность сопряженного оператора. Нахождение его матрицы в произвольном базисе.

15. Основные свойства самосопряженного оператора. Спектральная теорема. Основные свойства ортогонального оператора. Спектральная теорема. Спектральная теорема для унитарного оператора.

16. Матричная запись квадратной формы. Приведение квадратичной формы ортогональным преобразованием к каноническому виду. Критерий Сильвестра. Закон инерции.

17. Определении группы. Примеры и следствия из аксиом. Симметрическая группа. Знакопеременная группа. Разложение группы на смежные классы по подгруппе. Нормальные подгруппы и фактор-группы. Гомоморфизмы и изоморфизмы. Кольца и поля. Основные примеры.

18. Идеалы в кольцах и фактор-кольца. Гомоморфизмы колец. Кольца главных идеалов. Поля частных.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.4 Содержание контрольно-оценочных мероприятий по направлениям воспитательной деятельности

Направление воспитательной деятельности	Вид воспитательной деятельности	Технология воспитательной деятельности	Компетенция	Результаты обучения	Контрольно-оценочные мероприятия
Профессиональн	учебно-	Технология	ОПК-3	У-2	Домашняя работа

ое воспитание	исследовательск ая, научно- исследовательск ая	самостоятельной работы			№ 1 Домашняя работа № 2 Домашняя работа № 3 Зачет Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Контрольная работа № 3 Контрольная работа № 4
---------------	---	---------------------------	--	--	--