ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Функциональный анализ

Код модуля	Модуль
1160337(1)	Специальные главы математики

Екатеринбург

Оценочные материалы составлены автором(ами):

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Бовкун Вадим Андреевич	кандидат физико-математических наук, без ученого звания	Доцент	математического анализа
2	Глазырина Полина Юрьевна	кандидат физико-математических наук, доцент	Заведующий кафедрой	математического анализа

Согласовано:

Управление образовательных программ Ю.Д. Маева

Авторы:

- **Бовкун Вадим Андреевич**, **Доцент**, **математического анализа**
- **Глазырина Полина Юрьевна**, **Заведующий кафедрой**, **математического анализа**

1. СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ Функциональный анализ

1.	**Объем дисциплины в зачетных единицах**	4	
2.	**Виды аудиторных занятий**	Лекции Практические/семинарские занятия	
3.	**Промежуточная аттестация**	Зачет	
4.	**Текущая аттестация**	Контрольная работа	2
		Коллоквиум	1
		Домашняя работа	2

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ (ИНДИКАТОРЫ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ Функциональный анализ

Индикатор – это признак / сигнал/ маркер, который показывает, на каком уровне обучающийся должен освоить результаты обучения и их предъявление должно подтвердить факт освоения предметного содержания данной дисциплины, указанного в табл. 1.3 РПМ-РПД.

Таблица 1

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения (индикаторы)	Контрольно-оценочные средства для оценивания достижения результата обучения по дисциплине
1	**2**	**3**
ОПК-1 -Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	Д-1 - Демонстрировать навыки самообразования З-1 - Демонстрировать понимание основных закономерностей, законов, теорий математики, их взаимосвязь с другими дисциплинами П-2 - Демонстрировать навыки использования основных естественнонаучных законов, теорий и принципов в важнейших практических приложениях У-1 - Определять пути решения задач профессиональной	Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2 Зачет Коллоквиум Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Лекции Практические/семинарские занятия

	деятельности, опираясь на знания основных закономерностей, законов, теории математики	

3. ПРОЦЕДУРЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ В БАЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА БРС)

3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

1. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – 0.6		
Текущая аттестация на лекциях	**Сроки – семестр, учебная неделя**	**Максимальная оценка в баллах**
Коллоквиум	5,8	*50*
Контрольная работа	5,16	*50*
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – 0.5		
Промежуточная аттестация по лекциям – зачет **Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – 0.5**		
2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – 0.4		
Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях	**Сроки – семестр, учебная неделя**	**Максимальная оценка в баллах**
Домашняя работа 1	5,5	30
Домашняя работа 2	5,11	30
Контрольная работа	5,16	40
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям– 1		
Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям–нет **Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям– не предусмотрено**		
3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий –не предусмотрено		
Текущая аттестация на лабораторных занятиях	**Сроки – семестр, учебная неделя**	**Максимальная оценка в баллах**
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям -не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям –нет **Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено**		

4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий –не предусмотрено		
Текущая аттестация на онлайн-занятиях	**Сроки – семестр, учебная неделя**	**Максимальная оценка в баллах**
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям -не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям –нет **Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – не предусмотрено**		

3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта

Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта	**Сроки − семестр, учебная неделя**	**Максимальная оценка в баллах**
Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено		
Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено		

4. КРИТЕРИИ И УРОВНИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

4.1. В рамках БРС применяются утвержденные на кафедре/институте критерии (признаки) оценивания достижений студентов по дисциплине модуля (табл. 4) в рамках контрольно-оценочных мероприятий на соответствие указанным в табл.1 результатам обучения (индикаторам).

Таблица 4

Критерии оценивания учебных достижений обучающихся

Результаты обучения	**Критерии оценивания учебных достижений, обучающихся на соответствие результатам обучения/индикаторам**
Знания	Студент демонстрирует знания и понимание в области изучения на уровне указанных индикаторов и необходимые для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Умения	Студент может применять свои знания и понимание в контекстах, представленных в оценочных заданиях, демонстрирует освоение умений на уровне указанных индикаторов и необходимых для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Опыт /владение	Студент демонстрирует опыт в области изучения на уровне указанных индикаторов.
Другие результаты	Студент демонстрирует ответственность в освоении результатов обучения на уровне запланированных индикаторов. Студент способен выносить суждения, делать оценки и формулировать выводы в области изучения. Студент может сообщать преподавателю и коллегам своего уровня собственное понимание и умения в области изучения.

4.2 Для оценивания уровня выполнения критериев (уровня достижений обучающихся при проведении контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля) используется универсальная шкала (табл. 5).

Таблица 5

Шкала оценивания достижения результатов обучения (индикаторов) по уровням

Характеристика уровней достижения результатов обучения (индикаторов)				
№ п/п	**Содержание уровня выполнения критерия оценивания результатов обучения (выполненное оценочное задание)**	**Шкала оценивания**		
		Традиционная характеристика уровня		**Качественная характеристика уровня**
1.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты в полном объеме, замечаний нет	Отлично (80-100 баллов)	Зачтено	Высокий (В)
2.	Результаты обучения (индикаторы) в целом достигнуты, имеются замечания, которые не требуют обязательного устранения	Хорошо (60-79 баллов)		Средний (С)
3.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты не в полной мере, есть замечания	Удовлетворительно (40-59 баллов)		Пороговый (П)
4.	Освоение результатов обучения не соответствует индикаторам, имеются существенные ошибки и замечания, требуется доработка	Неудовлетворительно (менее 40 баллов)	Не зачтено	Недостаточный (Н)
5.	Результат обучения не достигнут, задание не выполнено	Недостаточно свидетельств для оценивания		Нет результата

5. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

5.1. Описание аудиторных контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля

5.1.1. Лекции

Самостоятельное изучение теоретического материала по темам/разделам лекций в соответствии с содержанием дисциплины (п. 1.2. РПД)

5.1.2. Практические/семинарские занятия

Примерный перечень тем

1. Метрические и линейные нормированные пространства.

2. Сходимость последовательности в классических функциональных пространствах и пространствах последовательностей.

3. Полные пространства.

4. Сепарабельные пространства.

5. Евклидовы и гильбертовы пространства. Ортонормальные, полные, замкнутые системы.

6. Измеримые множества, измеримые функции.

7. Интеграл Лебега.

8. Линейные, непрерывные, ограниченные операторы и функционалы. Норма оператора.

9. Обратный оператор. Спектр оператора.

10. Сопряженные операторы.

11. Вполне непрерывные операторы.

12. Интегральные уравнения.

Примерные задания

1. Пусть X — произвольное непустое множество и отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ при любых $x, y, z \in X$ удовлетворяет условиям: $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$. Доказать, что ρ задает метрику на X.

2. Пусть задано метрическое пространство (X, ρ). Доказать, что следующие отображения также задают метрики на множестве X:

a) $\rho_1(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$; b) $\rho_2(x,y) = \ln(1+\rho(x,y))$;

c) $\rho_3(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$; d) $\rho_5(x,y) = \operatorname{arctg}\rho(x,y)$.

3. Построить шары $B[0,1]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если для произвольных $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$ метрика определяется следующим образом:

a) $\rho(x,y) = \max\left\{\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\eta_2)^2}, |\xi_3-\eta_3|\right\}$;

b) $\rho(x,y) = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\eta_2)^2} + |\xi_3-\eta_3|$;

c) $\rho(x,y) = 2|\xi_1-\eta_1| + \dfrac{1}{3}|\xi_2-\eta_2| + |\xi_3-\eta_3|$.

4. Исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространствах $C[0,1]$ и $\widetilde{L}_1[0,1]$, если

a) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$; b) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

c) $x_n(t) = \dfrac{nt}{1+n^2t^2}$; d) $x_n(t) = \sqrt[n]{1+t^n}$.

5. Исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространствах $C[0,1]$ и $C^1[0,1]$, если

a) $x_n(t) = \dfrac{t^n}{n} - \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$; b) $x_n(t) = \dfrac{t^n}{n}$; c) $x_n(t) = \sin t - \sin\dfrac{t}{n}$.

6. Исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n = \left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, в пространствах l_p, c_0, c, m, если

a) $\xi_k^{(n)} = \begin{cases} k^{\alpha}, & k \le n, \\ 0, & k > n; \end{cases}$ b) $\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n^{\alpha}}, & k \le n, \\ 0, & k > n; \end{cases}$

c) $\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \sin\frac{1}{k}, & k \le n, \\ \frac{1}{k}, & k > n; \end{cases}$ d) $\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{k}{k+1}, & k \le n, \\ 1, & k > n; \end{cases}$

e) $\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{k\sin k}{k+1}, & k \le n, \\ \sin k, & k > n. \end{cases}$ f) $\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}, & k \le n, \\ \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}, & k > n. \end{cases}$

7. Доказать, что в метрическом пространстве открытый шар является открытым множеством, замкнутый шар является замкнутым множеством.

8. Доказать, что множество $M = \{x \in C[a,b] : \ 2 < x(t) \le 7, t \in [a,b]\}$ не является ни замкнутым, ни открытым в пространстве $C[a,b]$.

9. Является ли множество $M = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}$ ограниченным, открытым, замкнутым в пространстве $C[0,1]$?

10. Является ли множество $M = \left\{ x \in \widetilde{L}_1[a,b] : \int\limits_a^b x(t)dt = 1 \right\}$ ограниченным, открытым, замкнутым в пространстве $\widetilde{L}_1[a,b]$?

11. Является ли линейное пространство $X = \mathbb{P}^2$ нормированным, если для $x = (\xi_1, \xi_2) \in X$

a) $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|}$; $\qquad$ *b*) $\|x\| = \left(|\xi_1|^p + |\xi_2|\right)^{1/p}, \quad 0 < p < 1$;

c) $\|x\| = |\xi_1 - \xi_2| + |\xi_1|$; $\qquad$ *d*) $\|x\| = \max\{|\xi_1 + 2\xi_2|; |\xi_1 - \xi_2|\}$?

12. Какие из следующих отображений задают норму на линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций:

a) $\|x\| = |x(a) - x(b)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$; $\qquad$ *b*) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$;

c) $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$?

13. Пусть на линейном пространстве X заданы нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Доказать, что норма $\|\cdot\|_2$ подчинена норме $\|\cdot\|_1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \quad \|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \Rightarrow \ \|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

14. В пространстве $C^1[a,b]$ сравните следующие нормы:

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|, \quad \|x\|_2 = |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|, \quad \|x\|_3 = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|dt.$$

15. В пространстве $C^m[a,b]$ сравните следующие нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |x^{(k)}(t)|, \quad \|x\|_2 = \max_{0\le k\le m} \left\{ \max_{t\in[a,b]} |x^{(k)}(t)| \right\}, \quad \|x\|_3 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

16. Пусть $1 \le p < q$. Докажите, что $l_p \subset l_q$. В пространстве l_p сравните нормы $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$ и $\|x\|_q = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^q\right)^{1/q}$.

17. Доказать по определению полноту линейного пространства $C(\mathbb{R})$ непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$.

18. Доказать по определению полноту следующих ЛНП: a) m; b) c; c) c_0.

19. Пусть заданы полное ЛНП $(X, \|\cdot\|)$ и линейное многообразие $Y \subset X$. Доказать, что ЛНП $(Y, \|\cdot\|)$ является полным тогда и только тогда, когда Y замкнутое множество.

20. Пусть на линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Докажите, что ЛНП $(X, \|\cdot\|_1)$ является полным тогда и только тогда, когда полно ЛНП $(X, \|\cdot\|_2)$.

21. Пусть X — линейное пространство последовательностей $x = \{\xi_k\}, \xi_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < +\infty$. На этом пространстве рассмотрим норму $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k^2}$. Докажите, что построенное таким образом ЛНП не является полным.

22. Доказать сепарабельность следующих ЛНП: a) c_0; b) l_p; c) c.

23. Доказать признак несепарабельного пространства. Пусть в ЛНП $(X, \|\cdot\|)$ существует несчетное множество S, удовлетворяющее следующему условию:

$$\exists r > 0: \ \forall x, y \in S \ x \neq y \implies \|x - y\| \geq r.$$

Тогда пространство $(X, \|\cdot\|)$ является несепарабельным.

24. Доказать, что ЛНП m не является сепарабельным.

25. Доказать, что линейное пространство $C(\mathbb{R})$ не является сепарабельным.

26. Докажите, что в линейном нормированном пространстве X нельзя ввести скалярное произведение, которое порождало бы имеющуюся норму, если
a) l_p, $p \neq 2$; *b)* c_0, c; *c)* $C[a, b]$; *d)* $L_p[a, b], L_p(\mathbb{R})$, $p \neq 2$.

27. Пусть X — евклидово пространство (над полем $\mathbb{P}$), $x, y \in X$. Доказать, что

a) если $x \perp y$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора);

b) если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то справедлива теорема, обратная теореме Пифагора;

c) если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то теорема, обратная теореме Пифагора, несправедлива;

d) если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то $x \perp y$ тогда и только тогда, когда $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

28. Доказать, что в нормированном пространстве произвольное конечномерное линейное многообразие является подпространством.

29. Пусть X — евклидово пространство, $M \subset X$. Доказать, что $M^\perp$ — подпространство.

30. Пусть X — евклидово пространство, $M \subset X$. Доказать, что $M^\perp = \overline{< M >}^\perp$.

31. Пусть H — гильбертово пространство, $M \subset H$. Доказать, что $M^{\perp\perp} = \overline{< M >}$.

32. В пространстве l_2 найти ортогональное дополнение до подпространства L, ортогональную проекцию элемента x_0 на L и расстояние от x_0 до L, если

a) $L = \left\{ x = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty \in l_2 : \ \sum\limits_{k=1}^\infty \dfrac{\xi_k}{k} = 0 \right\}, \quad x_0 = \left\{ 1, 0, \dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{5}, 0, ... \right\}$;

b) $L = \{ x = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty \in l_2 : \ \xi_1 = \xi_3 = 0 \}, \quad x_0 = \left\{ (-1)^k \sqrt{\dfrac{5^k}{k!}} \right\}$.

33. В пространстве $L_2[0, 1]$ найти ортогональное дополнение до подпространства L, ортогональную проекцию элемента x_0 на L, расстояние от x_0 до L, если

a) $L = \left\{ x \in L_2[0,1] : \ \int_0^1 x(t)dt = 0 \right\}, \quad x_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2, & t \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$

b) $L = \left\{ x \in L_2[0,1] : \ \int_0^1 x(t)dt = \int_0^1 tx(t)dt = 0 \right\}, \quad x_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

c) $L =< \{\sin \pi t, \cos \pi t\} >, \quad x_0(t) = 1.$

34. Доказать, что указанный функционал $f : X \to \mathbb{R}$ является линейным и непрерывным на пространстве X, найти его норму:

i) $f(x) = 2x(1) - 3x(0), \qquad X = C[-1, 1]$;

ii) $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)dt, \qquad a)\ X = C[-1, 1], \quad b)\ X = L_1[-1, 1], \quad c)\ X = L_2[-1, 1]$;

iii) $f(x) = 2\int_0^{1/3} x(t)dt - \int_{2/3}^1 x(t)dt, \quad a)\ X = C[0, 1], \quad b)\ X = L_1[0, 1].$

35. Доказать, что указанный оператор $A : X \to Y$ является линейным и непрерывным на X, найти его норму:

i) $Ax(t) = \int_a^t x(s)ds$, $\quad a)$ $X = Y = C[a,b]$, $\quad b)$ $X = Y = L_1[a,b]$;

ii) $Ax(t) = \int_0^t s^3 x(s)ds$, $\quad a)$ $X = Y = C[0,4]$, $\quad b)$ $X = Y = L_1[0,4]$, $c)$ $X = L_2[0,4], Y = L_1[0,4]$;

iii) $Ax(t) = \int_1^2 (2t+s)x(s)ds$, $\quad a)$ $X = C[1,2],\ Y = C[0,1]$, $\quad b)$ $X = L_1[1,2]$, $Y = C[0,1]$, $\quad c)$ $X = L_1[1,2],\ Y = L_1[0,1]$;

iv) $Ax(t) = x'(t)$, $\quad X = C^1[a,b],\ Y = C[a,b]$.

36. Доказать, что оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$, действующий в пространстве $C[a,b]$, с областью определения $D(A) = \{x \in C[a,b] :\ x' \in C[a,b]\}$ является неограниченным оператором.

37. Выяснить, является ли оператор $A : C[a,b] \to C[a,b],\ Ax(t) = x'(t)$ обратимым, если

a) $D(A) = \{x \in C[a,b] : x' \in C[a,b]\}$; $\quad b)$ $D(A) = \{x \in C[a,b] : x' \in C[a,b],\ x(a) = 0\}$;

c) $D(A) = \{x \in C[a,b] : x' \in C[a,b],\ x(a) = x(b)\}$.

В случае обратимости A найти A^{-1} и исследовать его на непрерывность. Найти спектр оператора A и провести классификацию точек спектра.

38. Найти спектр оператора $A : X \to X$ и провести классификацию точек спектра, если

a) $Ax = \{\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots\}$, $\qquad X = l_2$;

b) $Ax = \{0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$, $\qquad X = l_2$;

c) $Ax = \{\alpha_k \xi_k\}_{k=1}^{\infty},\ \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in m$, $\qquad X = l_2$;

d) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$, $\quad X = C[0,1]$;

e) $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$, $\quad X = C[a,b],\ \varphi \in [a,b]$.

39. Для заданного линейного оператора $A : X \to Y$ найти сопряженный оператор:

a) $Ax = \{\alpha_k \xi_k\}_{k=1}^{\infty},\ \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in m$, $\qquad X = Y = l_2$;

b) $Ax(t) = \int_a^b (ts^3 + st^3)x(s)ds$, $\qquad X = Y = L_2[a,b]$;

c) $Ax(t) = \int_a^t x(s)ds$, $\quad X = Y = L_2[a,b]$.

40. Пусть заданы линейные нормированные пространства X, Y и $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Доказать, что оператор A является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда образ $A\left(\overline{S}_0^1\right)$ является компакткным множеством в пространстве Y.

41. Выяснить, является ли оператор вполне непрерывным, если

i) $Ax(t) = \int_0^1 x(s^2)ds$, $\quad a)$ $A :\ C[0,1] \to C[0,1]$, $\quad b)$ $A :\ L_1[0,1] \to L_1[0,1]$;

ii) $Ax(t) = x\left(\sqrt{t}\right)$, $\quad a)$ $A :\ C[0,1] \to C[0,1]$, $\quad b)$ $A :\ L_1[0,1] \to L_1[0,1]$;

iii) $Ax(t) = tx(t)$, $\quad a)$ $A :\ C[0,1] \to C[0,1]$, $\quad b)$ $A :\ L_1[0,1] \to L_1[0,1]$;

iv) $Ax(t) = x'(t)$, $\quad a)$ $A :\ C^1[0,1] \to C[0,1]$, $\quad b)$ $A :\ C^2[0,1] \to C[0,1]$.

42. В пространстве $C[0,1]$ методом последовательных приближений и методом решения для уравнений с вырожденным ядром найти решение интегрального уравнения Фредгольма

$$a)\ x(t) - 2\int_0^1 ts^2 x(s)ds = 1; \qquad b)\ x(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds = 1.$$

43. В пространстве $C[a,b]$ найти решение интегрального уравнения Фредгольма $x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t)$ с вырожденным ядром, если

a) $K(t,s) = e^{t-s}$, $y(t) = t$, $[a,b] = [0,1]$;

b) $K(t,s) = ts - t^2s^2$, $y(t) = t^2 + t^4$, $[a,b] = [-1,1]$;

c) $K(t,s) = t^2 - ts$, $y(t) = t^2 + t$, $[a,b] = [-1,1]$.

44. Найти решение интегрального уравнения Вольтерра $x(t) - \int_0^t K(t,s)x(s)ds = y(t)$ методом сведения к задаче Коши для ОДУ, если

a) $K(t,s) = s^2$, $y(t) = t^3 + 2$; $\quad$ *b)* $K(t,s) = \dfrac{1}{1+s^2}$, $y(t) = \operatorname{arctg} t$;

c) $K(t,s) = s - t$, $y(t) = t$.

45. С помощью теорем Фредгольма найти все $y \in L_2[0,\pi]$, при которых интегральное уравнение

$$x(t) - \int_0^\pi \sin(t-s)x(s)ds = y(t)$$

разрешимо (имеет хотя бы одно решение) в пространстве $L_2[0,\pi]$.

46. Найти все значения вещественных параметров a, b, c, при которых уравнение

$$x(t) - \lambda \int_{-1}^1 (ts + t^2s^2)x(s)ds = at^2 + bt + c$$

разрешимо в пространстве $L_2[-1,1]$ для любого значения $\lambda \in \mathbb{R}$.

LMS-платформа − не предусмотрена

5.2. Описание внеаудиторных контрольно-оценочных мероприятий и средств текущего контроля по дисциплине модуля

Разноуровневое (дифференцированное) обучение.

Базовый

5.2.1. Контрольная работа № 1

Примерный перечень тем

1. Линейные, непрерывные, ограниченные операторы. Норма ограниченного оператора. Продолжение функционала с сохранением нормы. Спектр оператора.

Примерные задания

1. Доказать, что оператор $A : C[-1,3] \to \widetilde{L}_2[-1,3]$, определяемый равенством $Ax(t) = t\int_{-1}^{3} x(s)ds$, является линейным, ограниченным, непрерывным и найти его норму.

2. Доказать, что оператор $A : l_2 \to l_2$, определяемый равенством $Ax = \left\{ \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \xi_k \right\}$, является линейным, ограниченным, непрерывным и найти его норму.

3. На линейном многообразии $L = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in X : 3\xi_1 - \xi_2 = 0\}$ в пространстве $X = \mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$ задан линейный функционал $f : L \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\xi_1 - \xi_2$. Найти продолжение функционала f на все пространство с сохранением нормы.

4. Найти спектр и регулярные точки оператора

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = \left(|3t-1| - \left|3t - \frac{1}{2}\right|\right) x(t).$$

Если $\rho(A) \neq \emptyset$, то найти резольвенту $R_A(\lambda)$, $\lambda \in \rho(A)$.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.2. Контрольная работа № 2

Примерный перечень тем

1. Сопряженные операторы. Спектр оператора. Операторные уравнения, теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения.

Примерные задания

1. Найти эрмитово сопряженный оператор для оператора

$$A : L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int_t^{t^2} (se^t - t^2)x(s)ds, \quad t \in [0,1].$$

2. Найти собственные значения и собственные функции оператора $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$, $Ax(t) = x''(t)$, если

$$D(A) = \{x \in C[0,\pi] : \ x'' \in C[0,\pi], x(0) = x(\pi), x'(0) = x'(\pi)\}.$$

3. Выяснить, является ли оператор

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^t e^{t-s}x(s)ds + t^4x(0) + x(1)\sin t$$

вполне непрерывным

4. С помощью теорем Фредгольма найти все $y \in L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, при которых интегральное уравнение

$$x(t) - \int_0^{\pi/2} \sin(t-5s)x(s)ds = y(t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

разрешимо в вещественном пространстве $L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.3. Коллоквиум

Примерный перечень тем

1. Метрические пространства. Определения и примеры.
2. Линейные нормированные пространства. Определения и примеры.
3. Топология нормированных пространств. Сравнение норм.
4. Полные и неполные нормированные пространства. Принцип вложенных шаров.

5. Теорема о пополнении.
6. Принцип сжимающих отображений и его применения.
7. Сепарабельные пространства.
8. Компактные множества. Теоремы Хаусдорфа, Арцела.
9. Непрерывные отображения, их свойства на компактах.
10. Евклидовы и гильбертовы пространства.
11. Ортогональные, полные и замкнутые системы. Ряды Фурье.
12. Мера Лебега. Измеримые функции.

Примерные задания

1. Является ли множество $M = \left\{ x \in L_3[-2,2] : \int\limits_{-2}^{2} t^2 x(t)dt = -1 \right\}$ открытым, замкнутым, ограниченным в пространстве $L_3[-2,2]$?

2. На линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций сравнить следующие нормы

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|, \qquad \|x\|_2 = 3\max_{t\in[0,1]} |x(t)| + 5\int_0^1 |x'(t)|dt.$$

3. Пусть X — линейное пространство числовых последовательностей $x = \{\xi_k\}$, $\xi_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2|\xi_k| < \infty$. Докажите, что пространство $(X, \|\cdot\|)$, где $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k|\xi_k|$, является неполным.

4. Доказать, что уравнение $x(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 e^{\sin ts} x(s)ds + t^2$, $t \in [0,1]$, имеет единственное решение в пространстве $C[0,1]$.

5. Является ли предкомпактным в пространстве $C[0,3]$ множество

$$M = \left\{ x \in C[0,3] \,\middle|\, x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{t^2+n^2}, t \in [0,3], \alpha \in \mathbb{R} \right\}?$$

6. Доказать, что в гильбертовом пространстве линейное многообразие L является всюду плотным тогда и только тогда, когда $L^{\perp} = \{0\}$.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.4. Домашняя работа № 1

Примерный перечень тем

1. Сходимость последовательности в классических функциональных пространствах и пространствах последовательностей. Гильбертовы пространства. Принцип сжимающих отображений.

Примерные задания

1. В пространствах $C[0,2]$ и $\widetilde{L}_1[0,2]$ исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если $a)$ $x_n(t) = \dfrac{n^2 e^t}{1+n^2e^{2t}}$; $b)$ $x_n(t) = \dfrac{t^n}{2^n+t^n}$.

2. В пространствах l_p, c_0, исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, если

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}, & k \le n, \\ \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[5]{k}}\right), & k > n. \end{cases}$$

3. В вещественном пространстве l_2 найти ортогональное дополнение подпространства L, ортогональную проекцию элемента x_0 на $L^{\perp}$, если

$$L = \left\{ x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k} = 0,\ 2\xi_1 + 3\xi_3 = 0 \right\}, \quad x_0 = \left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

4. При всех значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ найти все решения или установить неразрешимость интегрального уравнения Фредгольма

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t^3 + \cos s)x(s)ds = 2\cos t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

LMS-платформа − не предусмотрена

5.2.5. Домашняя работа № 2

Примерный перечень тем

1. Линейные, непрерывные, ограниченные операторы и функционалы. Норма оператора. Обратный оператор.

Примерные задания

1. Доказать, что функционал $f : C[-1,1] \to \mathbb{R}$, определяемый равенством $f(x) = \int_{-1}^{0} \sqrt[3]{t^5}\, x(t)dt + \int_0^1 x(t)dt$, является линейным, ограниченным и непрерывным на пространстве $C[-1,1]$, найти его норму.

2. Доказать, что линейный оператор $A : X \to X$, определяемый равенством

$$Ax(t) = \int_0^t (6s - s^2)x(s)ds, \quad t \in [0,6],$$

является ограниченным и найти его норму, если $a)$ $X = C[0,6]$; $b)$ $X = L_1[0,6]$.

3. В вещественном пространстве $C[0,1]$ задан оператор

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = x'(t) - x(t)$$

с областью определения

$$D(A) = \{x \in C[0,1] : x' \in C[0,1],\ x(0) = x(1)\}.$$

Доказать, что оператор обратим, найти A^{-1} и исследовать его на непрерывность.

LMS-платформа − не предусмотрена

5.3. Описание контрольно-оценочных мероприятий промежуточного контроля по дисциплине модуля

5.3.1. Зачет

Список примерных вопросов

1. Понятие метрики, основные определения (предел последовательности, предельные и граничные точки множества, открытость и замкнутость, доказательство открытости и замкнутости открытого и замкнутого шаров).
2. Полнота (понятие фундаментальной последовательности, полнота пространства C[a,b]). Теорема о пополнении пространства (формулировка и схема пополнения).
3. Теорема о последовательности вложенных замкнутых шаров в полном пространстве.
4. Принцип сжимающих отображений.
5. Компактность и предкомпактность, доказательство что непрерывный функционал достигает своей верхней и нижней грани на компактном множестве.
6. Теорема Хаусдорфа (критерий компактности в метрическом пространстве). Теорема Арцела.
7. Норма в линейном пространстве. Введение метрики через норму. Примеры нормированных пространств.
8. Лемма Рисса о почти перпендикуляре Замкнутость конечномерного подпространства.
9. Скалярное произведение, его свойства, неравенства Коши-Буняковского, определение нормы через скалярное произведение и доказательство свойств нормы. Теорема об ортогональном разложении Гильбертова пространства и следствие.
10. Ортогональные, ортонормированные, замкнутые и полные системы, ряды Фурье. Теоремы о существовании полной ОНС в сепарабельном Гильбертовом пространстве.
11. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля, связь с полнотой, свойства минимальности сумм Фурье. Теорема Рисса-Фишера.
12. Теорема об изоморфизме сепарабельных Гильбертовых пространств.
13. Норма оператора, линейные операторы, непрерывность линейного оператора. Теорема о свойствах линейного оператора, эквивалентных непрерывности. Пространство линейных операторов.
14. Теорема Банаха о равномерной ограниченности. Теорема о поточечной сходимости операторов.
15. Теорема Банаха об обратном операторе (формулировки и следствия).
16. Линейные функционалы, свойства линейных функционалов, сопряженное пространство, теорема о функционалах с совпадающим ядром.
17. Общий вид линейных функционалов в разных пространствах.
18. Теорема Хана-Банаха (формулировка, следствия и доказательство следствий).
19. Сопряженный оператор, его свойства. Биортогональные системы. Теоремы о собственных значениях.
20. Вполне непрерывные операторы, их свойства.
21. Спектр оператора, свойства спектра.
22. Спектр самосопряженного оператора.
23. Спектр вполне непрерывного оператора.

LMS-платформа − не предусмотрена

5.4 Содержание контрольно-оценочных мероприятий по направлениям воспитательной деятельности

Направление воспитательной	Вид воспитательной	Технология воспитательной	Компетенция	Результаты	**Контрольно-оценочные**

деятельности	деятельности	деятельности		обучения	**мероприятия**
Воспитание навыков жизнедеятельности в условиях глобальных вызовов и неопределенностей	целенаправленная работа с информацией для использования в практических целях	Технология формирования уверенности и готовности к самостоятельной успешной профессиональной деятельности Технология самостоятельной работы	ОПК-1	З-1 П-2	Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2 Зачет Коллоквиум Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Лекции Практические/семинарские занятия